ELEMENTI GEOMETRICI
PIANI, E SOLIDI
DI EUCLIDE

POSTI BREVEMENTE IN VOLGARE

DAL REVERENDISSIMO PADRE ABATE

D. GUIDO GRANDI
CAMALDOLESE

PROFESSORE DI MATTEMATICA
NELL' UNIVERSITA' DI PISA
ED ILLUSTRATI CON VARIE ANNOTAZIONI

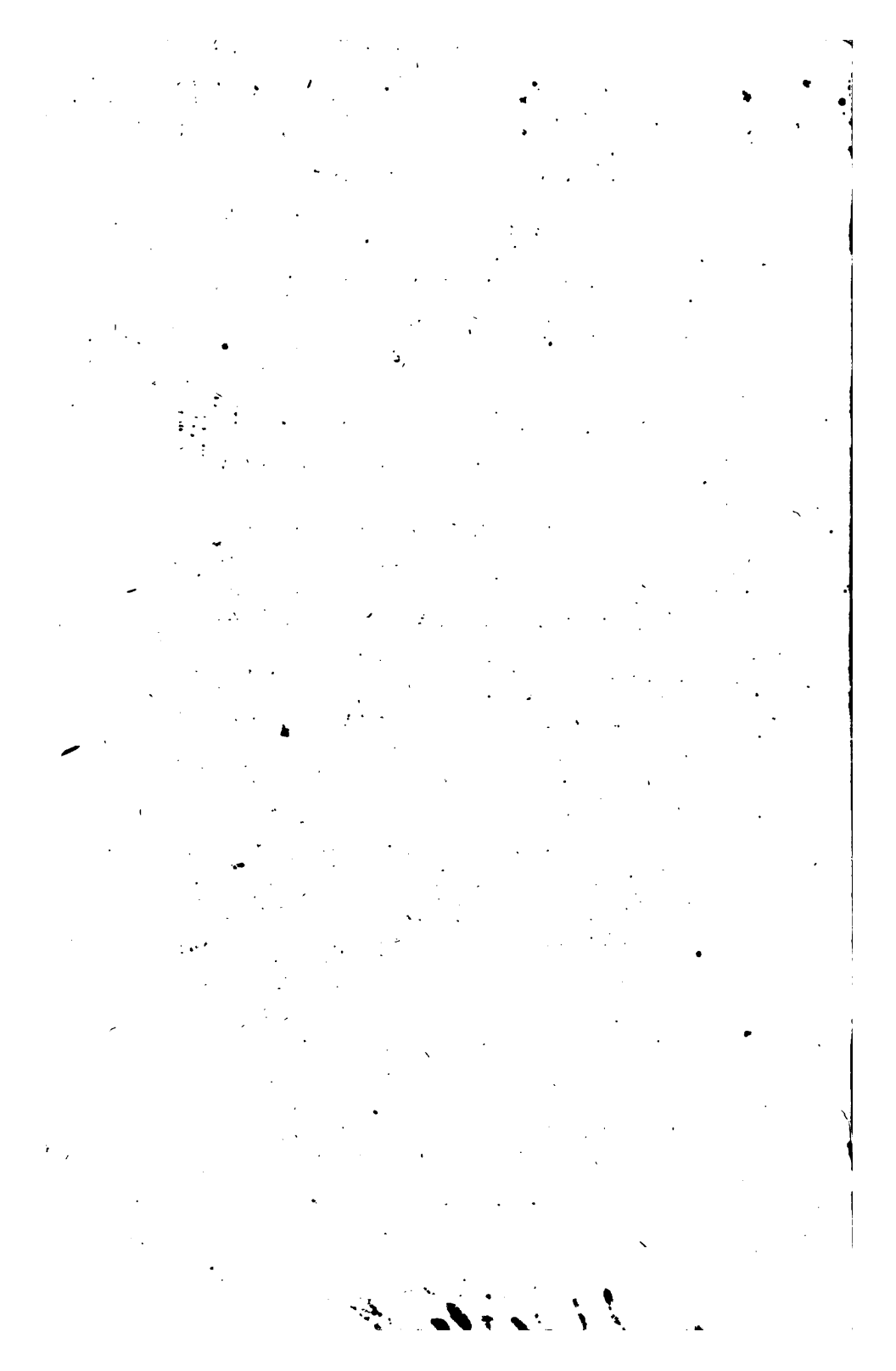
DAL PIEVANO CARLO ANDREINI

GIA' LETTORE DI FILOSOFIA E MATTEMATICA

NEL SEMINARIO FIORENTINO.

EDIZIONE TERZA.

IN FIRENZE L' ANNO MDCCXCII.
PER GAETANO CAMBIAGI STAMPATORE GRANDUCALE.

Con Licenza de' Superiori.

PREFAZIONE

AI BENEVOLI LETTORI

QUesti Elementi Geometrici, fatti da Euclide, sono necessari a chiunque brama erudirsi della Mattematica, la quale è utile non solo a' Filosofi, ma ancora a' Teologi, ed ai Legali, come ne discorre il P. Carlo Rabby nel suo Libro: *De Mathematicarum disciplinarum ad Theologiam utilitate, ipsarumque in ea usu*; ed a tutti i Letterati, come dice Diocleziano nel Codice *lib.* 9. *tit.* 18. *l.* 2. *Artem Geometriae discere, atque exercere publice interest.*

Però chi non avrà imparati questi Geometrici Elementi, non potrà in altre Dottrine riuscir bene, e particolarmente in quelle Scienze, nelle quali si trovano alcune proposizioni appartenenti ad essi Teoremi, o Problemi Geometrici di qualche pratica proposta da' Mattematici; onde la regola di qualsivoglia difesa non manca ai Geometri, come dicesi nella *legge* 22. *del tit.* 1. *lib.* 27. *Digestorum*, cioè *Geometrae a tutelis non vacant*; e Proclo Diadoco *lib.* 2. *cap.* 5. ne accenna: *Geometricarum rerum contemplationis institutio, invincibilem,*

perfectamque habet enarrationem; e molto più altrove ne parla in quell'Opera, dove comenta questi Elementi d' Euclide.

Non fu Euclide il primo, che trattasse di tali principj Mattematici, avendone prima parlato Talete Milesio, Pittagora, Anassagora Clazomenio, Ippocrate Chio, Leonzio, Eudosso Gnidio, Theudio Magnete, Ermotimo Colofonio ec. Questi Elementi di Euclide per venti secoli furono abbracciati da chiunque apprese le Mattematiche; ma dal 1650. in quà ne sono stati fatti altri Elementi di Geometria da varj Autori, cioè dal Borelli, dal Lamy, da Pardies, dallo Sturmio, dal Rossetti, da Angelo Marchetti ec. e da me ancora, come potrà vedersi nelle mie Instituzioni Geometriche.

Questo dottissimo Geometra Euclide fu da alcuni chiamato *Megarense*, cioè da Bartolommeo Zamberto negli Elementi da esso stampati di Campano, e di Teone Greco; da Gio. Scheubeglio, da Oronzio Fineo, da Niccolò Tartalea, e da alcuni altri; ma erarono mentre Euclide Megarense fu un Filosofo discepolo di Socrate, e non questo Mattematico che fece questi Elementi. Imperocchè Proclo Diadoco dice che questo Euclide Mattematico, fiorisse al tempo di Tolomeo Lago Re di Egitto, di cui godeva la grazia. Quando dalla morte di Socrate, Maestro di quell'altro Euclide Megarense, ne corsero 95. anni al Regno del suddet-

to

to Tolomeo, come dice Stanleio; o almeno anni 80., come accenna il Petavio.

Di più lo stesso Proclo afferma, che questo Euclide Geometra fosse più giovane di Menecmo, discepolo di Eudosso Gnidio, il quale pure era stato discepolo di Platone; ma fu ancora di Platone Maestro il detto Socrate; dunque esso Mattematico Euclide non può avere conosciuto Platone, se non molto vecchio, e molto meno potè essere egli discepolo di Socrate, come era quell' altro Euclide di Megara. Inoltre può osservarsi, che tra gli scritti d' Euclide Megarense, registrati da Diogene Laerzio, non vi è cosa alcuna mattematica. Anzi l' istesso Diogene Laerzio asserisce, che quell' Euclide Megarense era portato alle Liti, e dal Maestro Socrate fu biasimato, dicendogli, non poter esso abitare con uomini ragionevoli. Il che non può attribuirsi ad Euclide Geometra, che fu mansuetissimo, e dottissimo, come ce lo descrive Pappo Alessandrino: *suavissimi Vir ingenii*, e che non era di Megara, ma della Regia Alessandria, dove egli aprì la prima scuola di Mattematica, e fece buoni discepoli, tra i quali Eratostene, ed Archimede.

Questo è quanto può dirsi, intorno alla Patria del nostro Euclide, di cui però solamente i primi sei libri de' Piani, e poscia l' undecimo, il duodecimo, e il terzodecimo de' Soli-

di

di ho quì addotti ; avendo lasciati il settimo, l' ottavo, ed il nono, ove si parla della proporzione de' numeri, ed ancora il decimo, ove tratta delle grandezze commensurabili, ed incommensurabili; essendo pure questi libri stati omessi negli Elementi fatti stampare dal Viviani, e da altri Autori. Laonde, Benevoli Lettori, leggendo queste Proposizioni da me brevemente raccolte, facilmente imparerete il corso della Mattematica; E vivete felici.

INTRODUZIONE
ALLA GEOMETRIA.

LA Mattematica dee reputarsi tra tutte le Scienze la più nobile, e più perfetta non tanto per le verità sottilissime, che in se racchiude, quanto per l' utilità grandissima, che apporta alle arti più ragguardevoli, e per la certezza infallibile, e chiarezza, che in qualunque delle sue parti traluce, come l' esperienza ci assicura, e ci svela.

Il nome di Mattematica dalla voce greca „ Μάθησις „ derivante non altro significa, che „ Scienza, Dottrina „, quasi che alla sola Mattematica, come alla più nobile, di tutte le Scienze umane un tal nome competasi; e perchè ancora nelle Scuole niuna cosa si apprende di più considerabile, racchiudendo in se tante cognizioni, che non vi è professione, a cui non possa ella essere vantaggiosa. L' Arimmetica, l' Algebra, la Geometrìa, l' Astronomìa, la Cronologìa, la Gnomonica, l' Archtettura militare, e civile, l' Ottica, la Diottrica, la Catottrica, le Meccaniche, o diversi trattati di Fisica ne sono le parti. Essa intorno alla quantità presa in astratto raggirasi, e indaga, e dimostra le proprietà ed affezioni della quantità astrattamente considerata. E siccome due sono i generi della quantità, dividendosi questa in „ discreta „, perchè risultante da varie parti fra loro disgiunte, e divise; e in „ continua „, per esser composta di parti continuate, e connesse; quindi è, che due altresì sono le parti, o Scienze principali, che dalla Mattematica, come da sua sorgente scaturiscono, L' Arimmetica, e la Geometria: la prima ha per suo oggetto la quantità discreta, che sono i numeri: la seconda considera la quantità continua, come sono le linee, le superficie, ed i solidi.

All' Arimmetica si applicarono di proposito i Fenici, perchè alla mercatura, ed alla navigazione erano attenti; onde fu-

furono creduti i ritrovatori di questa utilissima facoltà. (1)

Ma lasciando da parte la Scienza de' numeri, alla Geometria mi rivolgerò con dar un' idea; Strabone, (2) *ed Erodoto* (3) *sono d'avviso; che la Geometria traesse la sua origine dagli Egiziani; poichè molestati essi annualmente dalle inondazioni del Nilo, che i limiti de' loro territorj confondeva, astretti furono a valersi della misura delle grandezze, e figure de' loro terreni, per distinguerne, e ritrovarne poscia i confini. Se poi gli Egiziani siano stati i primi ritrovatori di questa Scienza; o siano stati gli Ebrei; come è di sentimento Giuseppe Ebreo; oppure se debbasi questa gloria a Mercurio Thoi, o Theut, che fiorì al tempo di Thamo Re dell' Egitto, come insegna Polidoro Vergilio* (4); *o finalmente a Meride Re di Egitto, che al dire di Erodoto innalzò le famose piramidi annoverate per la loro altezza fra le maraviglie del mondo; tutto questo si lascia all' esame de' Critici. Quello però che non si revoca in dubbio si è, che dalla detta misura ebbe origine il nome di questa Scienza, perchè „ Geometria „ denota appunto „ misura della terra „, essendo una tal voce formata da due parole greche „ γῆ, che significa „ terra „, e „ μετρεῖν misurare. „*

Dall' Egitto passò nella Grecia, ed il primo che la insegnasse fu Talete Milesio, inventore delle Proposizioni V. XV. XXVI. del primo Libro, e della II. fino alla V. inclusive del Libro quarto degli Elementi Geometrici.

Nuovo lustro, ed accrescimento fu dato alla Geometria da Pittagora, il quale fu di essa l' inventore presso i Greci, ed ebbe

(1) Ebbe nell' Italia i suoi principj l'Arimmetica fino dal 1200. nel qual'anno Leonardo Pisano Fabionacci ci portò i numeri Arabici, e con essi le regole arimmetiche, che tal foggia di numeri suppongono. Quanto fosse egli perito, bene il dimostra il di lui Manoscritto, che nella Magliabechiana conservasi. Una tale arte compagna addivenne della Mercatura, della quale in mezzo alla barbarie de' tempi furono i più celebri i Fiorentini, i Genovesi, e i Veneziani, ai quali tutti, e singolarmente ai Fiorentini è la mercatura debitrice delle due ricchissime, e vantaggiosissime Arti della Seta, e della Lana, dell'eccellente sistema delle lettere di cambio, e del metodo della scr. doppia.

(2) Lib. XVII.

(3) Lib. II.

(4) De Invent. rer. lib. 1. cap 8.

ebbe il vanto di ritrovare i seguenti famosi Teoremi XXXII. XLIV. XLVII. XLVIII. del Libro primo. Anzi di più narrasi essere stato sì grande il giubbilo di lui per aver rintracciate due delle mentovate Proposizioni la XXXII., e la XLVII., che sacrificò l' Ecatombe, se prestar fede si dee ad Apollodoro appresso Laerzio; sebbene Cicerone è d' avviso, che un solo toro sacrificasse, e questo al dire di Porfirio, di pasta, o come vuole il Nazianzeno, di terra.

Anche Platone il più illustre Filosofo, che fiorisse in Atene accrebbe molto splendore alla Geometrìa, cui tanto reputò necessaria per le Filosofiche speculazioni, che sopra la porta del di lui Ateneo scolpito leggevasi questo epigrafe,

„ Οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω „

„ *Nemo Geometriae expers accedito* „

dicendo nel suo Dialogo del sommo Bene, che tutte le discipline senza di questa sono manchevoli, e disadorne; e nel settimo delle Leggi comanda, che le mattematiche imparar si debbano prima di tutte l' altre, perchè esse corroborano la mente, e incanutiscono l' ingegno, facendolo idoneo non solo alle Arti liberali, ma anche all' amministrazione della Repubblica, ed al governo delle Città.

Che dirò d' Aristotile, i di cui libri non possono intendersi senza l' aiuto di questa Scienza, per esser ripieni di figure, di esempi, e di osservazioni geometriche? Che dirò di tant' altri Geometri, d' Eudosso, a cui siamo debitori della dottrina delle Proporzioni? Di Menecmo, del di cui ingegno è parto la Scienza sublimissima delle Coniche Sezioni? Le celebri scoperte però, e le speculazioni geometriche fatte da Talete, da Pittagora, da Platone, da Aristotile, e da altri molti Geometri de' più remoti tempi sembravano al certo come le membra da un corpo recise, tanto erano disparate, e disgiunte; onde si bramava un ordine, onde poterle agevolmente dimostrare.

Un' impresa sì bella fu prima di tutti tentata da Ippocrate, e da Leonte; ma più che ad ogni altro riuscì d' eseguirla con felice successo ad Euclide l' Alessandrino a' tempi di Tolomeo

fi-

figlio di Lago tre secoli avanti l' Era Cristiana. Euclide infatti oltre aver compilati gli altrui ritrovamenti, ed averli messi in buon metodo, e accresciuti, e con più esatte dimostrazioni distesi, quel prezioso tesoro ci lasciò de' suoi Geometrici Elementi stati da tutti i Mattematici sì antichi come moderni applauditi, ed illustrati.

Fra questi sono da annoverarsi il Galileo (1), *il Clavio, il Tacquet, il Torricelli, il Borelli, il Viviani, il Pardies, il Polinier, il Marchetti, il Wolfio, il Clairaut, il Deidier, ed altri molti eccellenti Scrittori. Sopra tutti però porta il vanto, come dice Newton, il P. Abate Grandi Camaldolense; poichè interrogato esso, chi credeva, che fosse il maggior Mattematico dell' Europa, rispose: = di là dal mare il P. Abate Grandi =. Segnalossi egli nel metodo specialmente sintetico con quelle sue geometriche pregiabilissime Instituzioni, le quali sono state ricevute con somma lode, ed applauso da tutti.*

Alla spiegazione e dilucidazione di tali Elementi darò cominciamento ad oggetto di agevolare la strada della Scienza, che a sublimi cognizioni ci guida, e che ci fa acquistare un senso giusto, per la ricerca del vero, e un metodo squisito per dar lume, e chiarezza alle cose; mentre ella indaga, e ritrova nel discorrere, o nell' argomentare in qualsisia materia le più rigorose maniere, e le più ineluttabili, per così dire, necessitadi, disdegnando ogni verisimile, o apparente ragione.

E quì mi sia lecito il far palese il metodo ed il sistema da me

(1) Il Galileo colla scorta della Geometria giunse a così sublime segno, che non solo è il Padre di nuove Mattematiche Scienze, e il più illustre conoscitore delle celesti regioni, a cui son tenute, e l'Astronomia, che da lui trasse tanta solidità ed estensione, e la Geografia, che senza i Pianeti Medicei dovea esser sempre imperfetta; ma il gran fondatore della vera Filosofia. Egli è, che l'ha condotta sulla Terra, pura, nuda, illuminata, assistita a ogni passo dalla infallibile Geometria alla destra, e dalla sagace diligente Esperienza alla sinistra. Quindi è, che Newton, che avea penetrato più d'ogni altro il fondo delle dottrine, e del modo di pensare del Galileo, soleva alle occasioni in tali magnifici sentimenti prorompere: „ In Galileo vi è tutto, o vi è il seme di tutto; se Galileo non era, io non era; discorrerei volentieri con gli altri, ma con Galileo ascolterei „.

me tenuto in questa esposizione. Primieramente ritrovandosi quasi in qualunque libro di essi Elementi qualche cosa difficile a concepirsi, ho procurato di schiarirla, o colle definizioni, o colle distinzioni. Così essendo assai malagevole a bene idearsi cosa sieno i punti, le linee, le superficie, come van concepite da' Geometri; in questa mia preliminare dissertazione mi sono ingegnato di minutamente dichiarare la loro natura, e la loro vera esistenza nel senso giusto de' Matematici. Quindi ho spiegate alcune voci, che nelle cose geometriche vanno adoperate, affinchè o la mancanza, o la oscurità loro arrecar non potesse alcun nocumento alle tenere menti de' giovani.

Essendomi quindi spesso avveduto, che, per esser talvolta framischiate le primarie colle secondarie dimostrazioni, i principianti perdono in esse la traccia del raziocinio, e quasi del tutto smarrisconsi, senza sapere, come rimettersi nel buon sentiero; ad imitazione dell' acutissimo Eineccio con più minuto carattere ho nelle annotazioni separatamente aggiunta la dimostrazione di quelle principali proposizioni, o asserzioni, che abbisognavano di particolare spiegazione.

Per rendere in terzo luogo meno rincrescevole questo studio ho posto a' suoi luoghi molte cose, che appartengono alla geometrica erudizione, e che servono di ornamento.

In ultimo riflettendo, che la dottrina degli ugualmente moltiplici, onde Euclide, ed alcuni suoi Commentatori dimostrano il quinto, e sesto libro, per saldissima che ella si sia, infastidisce di soverchio, inviluppa, e spaventa per la sua difficoltà gl' ingegni più che mediocri; ad un tal metodo un altro ne sostituirò, aggiungendo alle Proposizioni di essi libri ovunque faccia di mestieri, un' altra più chiara dimostrazione: sembrandomi questo secondo metodo più spedito, e più facile, praticato eziandio da' più accreditati Geometri, dal Galilei, dal Viviani, e da altri. Tutto questo io mi studierò di eseguire con la scorta de' più eccellenti Scrittori in sì fatte materie. Grave certamente è l' incarico,

„ E d' altri omeri somo, che de' miei,

sì per la difficoltà dell' impresa, come ancora per l'incertezza d'un buon esito. Ma se debbo ingenuamente confessarlo, non mi sarei mai inoltrato a prendere tale impegno, se non mi avessero incoraggito le replicate istanze degli studiosi giovani, che hanno ascoltate le mie Lezioni, e del benefico mio Mecenate Monsig. Incontri, il quale mi stradò nel corso di questi Elementi. Ma per procedere con ordine comincerò dall' assegnar la definizione di lei.

La Geometrìa non altro è nel significato generale, che „ la scienza delle cose dotate di estensione „ che se poi ella si consideri strettamente, „ è quella Scienza, che contempla i solidi, le superficie, le linee „.

Dividesi questa in quattro specie: 1. in = Planimetria =, che considera, ed indaga la misura de' piani: 2 in = Altimetrìa =, che determina la misura delle altezze: 3 = in Longimetrìa =, che va speculando la misura delle cose lontane: 4 in „ Stereometrìa = che raggirasi intorno alla misura de' solidi.

La Geometria presa nel primo generale significato ha per oggetto l'estensione. Per questo nome d' = estensione =, o di = continuo = si dee intendere tutto ciò, che costa di lunghezza, larghezza, e profondità =, come sono i corpi tutti, che esistono nell' universo, niuno essendovene, che non ha fornito delle tre divisate dimensioni. Tutte queste dimensioni, onde è composta l'estensione, o la quantità continova, sempre ritrovansi insieme congiunte in tutte quelle cose, che esistono nel Mondo. Ed infatti chiunque le consideri attentamente, neppure una ne rintraccerà, che abbia o una sola, o due dimensioni soltanto. Per lo che il solo modo di concepire che fa la mente, appellato dalle scuole = astrazione = possono le tre mentovate dimensioni separarsi a vicenda le une dall' altre. In cotal guisa appunto i Geometri considerano non solamente i corpi, ma ancora la superficie, le linee, ed i punti.

Poichè I. astraendo essi dal corpo la profondità, quello che vi rimane lo addimandano = superficie =, la quale conseguentemente dotata esser dee di lunghezza, e di larghezza, per essere mancante della profondità. II.

II. *Separando poi essi dalla superficie la larghezza, passano alla = linea =, la quale avendo soltanto lunghezza, è priva sì di larghezza, come di profondità.*

III. *Finalmente togliendo i Geometri stessi dalla linea la lunghezza, e solo attendendo agli estremi di lei, non altro ravvisano, che soli due punti, i quali per conseguenza non hanno parti, nè dimensione veruna.*

Per lo contrario dal piano così a grado a grado salgono al contrario.

I. *Concepiscono essi primieramente che il punto scorre per un qualche piano: e siccome il punto è privo di parti, di dimensioni, il di lui flusso lascerà nei piani un vestigio, che avrà lunghezza solamente, e perciò verrà a descrivere una linea.*

II. *Secondariamente figuransi, che questa linea si muova lateralmente: e perchè con questo moto laterale si viene ad aggiungere ad essa la larghezza; quindi è, che ne nascerà la superficie, che ha lunghezza, e larghezza.*

III. *In ultimo sogliono i Geometri idearsi, che muovasi questa superficie in alto, o in profondo: e comecchè si viene in tal guisa ad aggiungerle l'altezza o la profondità; per questo appunto ne resulterà il corpo, il quale è fornito di lunghezza, di larghezza, e di profondità.*

Dal che rilevasi, vani essere, e ridicoli i ritrovati degli Scettici, allorchè s' ingegnano di revocare in dubbio la certezza della Geometrìa, perchè i Geometri suppongono, che oltre i corpi si dieno eziandio i punti, le linee, e le superficie, che nella natura delle cose non esistono. E non si avvedono, che lontanissimi sono i Geometri dal supporre, che dar si possa il punto separato dalla linea, la linea dalla superficie, la superficie dal corpo. Solo essi sostengono, niuna repugnanza esservi, che le tre dimensioni, larghezza, lunghezza, e profondità considerar si possono o tutte insieme congiunte, o le une dall' altre divise: lo che è fuori d' ogni dubbio; poichè dovendosi determinare la distanza d' una Città da un' altra, si misura soltanto la lunghezza delle contrade senza punto considerare la loro larghezza.

Oltre a questo sebbene i punti, le linee, e le superficie non esistano, nè esister possano separate dal corpo, ciò peraltro non c' impedisce dal potere asserire, che tutte le sopraccennate cose veramente, e realmente esistano nel corpo istesso. Poichè non essendo il corpo infinito, dee avere i suoi termini veri, e reali; i quali dovendo esser privi di profondità, non potranno conseguentemente esser corpi, ma superficie. E siccome neppur queste sono infinite, vi saranno anche in esse i propri termini veri, e reali, che per essere mancanti di larghezza, avranno lunghezza solamente, e perciò saranno mere linee.

Per ultimo essendo ciascuna di queste linee finita, le si competeranno i suoi termini veri, e positivi, i quali non potendo avere nè lunghezza, nè larghezza, nè profondità, non altro saranno che semplici punti. Quindi è manifesto, che quantunque i punti, le linee, e le superficie si considerino da' Geometri astrattamente, esistono non pertanto realmente nel corpo medesimo. E' chiaro altresì, che queste cose esistono nel corpo, non come parti fisiche di esso, non avendosi riguardo alcuno alla di lui sostanza; ma come parti, per usare il termine delle scuole, = modali =, mentre si considera il corpo solamente come finito e terminato nella sua grandezza.

Tutto ciò ho creduto necessario il premettere, per rendere più chiari, e meno spiacevoli i principj di questa scienza, sapendo io per esperienza, che il dar cominciamento alla spiegazione di questa facoltà col pronunziare in aria severa: = il punto è un segno nella quantità senza veruna parte = &c., si sbigottiscono i novelli Geometri, e sembra loro di entrare in una via aspra ed inamena, ove sia facile lo smarrirsi, o l'affaticarsi con poco vantaggio, e diletto.

E facendo io ritorno alla prima specie della Geometria, qual' è la Plenimetria; suole questa dividersi in = Teoretica =, ed in = Pratica =. La prima indaga, e dimostra le proprietà de' piani, o delle superficie piane: la seconda si serve della contemplazione di simili proprietà per lo scioglimento de' Problemi.

La Teoretica pure distinguesi in = Elementare =, e in

su-

= Sublime =. L' Elementare si ferma a considerare soltanto le linee rette, o circolari, le superficie piane, ed i solidi: la Sublime oltrepassa a contemplare le linee curve, ed i solidi da quelle generati.

Intorno alla Elementare Teoretica si ravvolge il trattato di questi Elementi, quali imprendo a schiarire colle mie annotazioni, dopo avere con questa mia preliminare dissertazione esposto il nome, la natura, le parti principali della Mattematica; e quindi l' origine, ed i progressi della prima, e più nobile di esse parti, qual' è la Geometrìa, di cui pure ho additata la derivazione del nome colla sua spiegazione, la natura, e le varie specie, nelle quali diramasi; ho in seguito appalesato il sistema, che sono per tenere in questa mia sposizione, ed i motivi, che a farlo m' indussero; ed in ultimo ho dichiarato, quale sia della Geometrìa l' oggetto, cosa sia la superficie, la linea, ed il punto, e come da' Geometri tali cose si concepiscano.

Mi rimane da aggiungere, che i Libri di Euclide, non oltrepassano il numero di XIII. E quantunque il Codice MS. degli Elementi d' Euclide, che nella Laurenziana Biblioteca ritrovasi, e che nel Pluteo XXVIII. tiene il secondo luogo fra tutti i XLIX. Codici in esso Pluteo esistenti, contenga libri XV. con antichi Scholi marginali, il primo dei quali libri porta in fronte: = Euclidis Elementorum I. ex Confabulationibus Theonis =; ciò non ostante il libro XIV. ha per suo titolo: = Hypsiclis (vi si sottintender liber) in Euclidem (oppure inter Euclidis) relatus =. Dal qual titolo si viene in cognizione, che i due ultimi libri del mentovato Codice, cioè il XIV. e XV. non hanno per suo autore Euclide, ma Issicle Alessandrino. Ed in vero la Prefazione premessa al libro XIV. la quale comincia βασιλείδης ὁ τύριος ὦ Πρώταρχε κ. λ. riferita dal Fabricio Bibl. Graec. Vol. II. pag. 371. seq., la menzione che fassi d' Isidoro precettore d' Issicle nella Proposizione V. del libro XV., e molte altre cose fanno vedere, che debbonsi i due sopraccennati ultimi libri attribuire ad Issicle piuttosto, che

ad

ad Euclide. Parimente sotto il nome d' Issicle furono trasportati in latino da Giorgio Valla, e da Bartolommeo Zamberto Veneziano, come ci afferma il Fabricio istesso al luogo di sopra citato. Oltre a ciò in questi due libri fassi il confronto di quei medesimi cinque corpi solidi, dei quali trattano i libri XI. XII. XIII., la di cui ultima proposizione dà il compimento all' Opera. Dunque non senza ragione soli XIII. libri si ammettono da Marino nella sua proteorìa ai dati, e nella Arabica versione di Nasiridino Tusino Persiano stampata in Roma nell' An. 1594. Alcuni poi son di sentimento, che ai XIII. libri pubblicati da Euclide fossero aggiunti gli altri due da Apollonio, de' quali ne fosse fatto il compendio da Issicle Alessandrino di sopra nominato. Questa brevissima Serie, ed Istoria fin quì tessuta intorno alla Mattematica, ed alla Geometrìa, potrà bastare per mio avviso al piacere, ed erudizione di quelli, che volgono la prima occhiata, e stendono i primi passi nell' ampio ed immenso campo di questa Scienza.

E siccome ogni Scienza ha per suo distintivo carattere, mediante certe semplicissime idee impresse dall' Autore della natura nelle menti umane, il dedurne una qualche cosa, che prima ignoravasi, e quindi alcune verità rilevarne da altre già discoperte, in guisa che una cognizione fa strada ad un' altra, e da cose di facile intelligenza, e a tutti ben note si giunge a conoscere, e penetrare le più sublimi, e più recondite; un tal metodo non meglio, che dalla Geometria vedesi praticato. Poichè essa da nozioni chiarissime appoco appoco alle più oscure, e dalle più basse alle più elevate conduce, e ciò eseguisce con stabilire certi facilissimi principj ai quali niuno può contradire: inoltre nulla in essa si afferma, o si ammette, che da questi non sia dedotto con raziocinio infallibile: e finalmente con evidenza quei teoremi stupendi, che tanto son lungi e da' sensi, e dalla cognizione umana, rendonsi chiari per mezzo de' medesimi principj, alla dilucidazione de' quali è omai tempo di dare cominciamento.

ELEMENTI DELLA GEOMETRIA DI EUCLIDE

LIBRO I.

DEFINIZIONI. (a)

I. IL PUNTO è un ſegno nella quantità, ſenza veruna parte. (b)

II. La LINEA è una eſtenſione in lungo ſenza veruna larghezza. (c)

III. E ſe la linea è terminata, i ſuoi TERMINI ſaranno i due punti, in cui finiſce.

 IV.

(a) Di tre generi ſono i principj, che della macchina elementare geometrica ſono il fondamento. Il primo di eſſi abbraccia le *Definizioni*, il ſecondo le *Dimande*, il terzo gli *Aſſiomi*. Le Definizioni, che da altri *Suppoſizioni* ſi appellano, non altro ſono che ſpiegazioni di quei termini, dei quali ſi ſervono i Geometri.

(b) Ad altri Geometri piacque di definire il *Punto*, il principio della quantità, cioè della triplice grandezza, o eſtenſione, come è la lunghezza, la larghezza, la profondità; eſſo non ha parti, ed è perciò indiviſibile. Niuna quantità aſſegnabile, per quanto piccola ella ſia, è propriamente il punto; poichè ogni parte della quantità per piccola che ſia contiene ſempre parti minori, e minori in infinito, come vedraſſi a ſuo luogo. Dipende pertanto il punto dalle aſtrazioni del geometra, il quale riſolve la quantità in minime parti, in cui non vi conſidera quantità alcuna, come ſe foſſero ineſteſe; e tali parti eſſo le dinomina *Punti*. Quindi Euclide definiſce il punto: *ciò che non ha parti*; e perciò lo diſſero i Greci ἄμερες, *impartibile*, *ſenza parti*.

(c) I Greci chiamano la linea ἀπλατής, *illatabile*, come in latino traduſſe Gellio in una

IV. Dicesi RETTA quella linea, che tra i suoi punti si distende egualmente. (a)

Tav. I. Fig. 1.

Così facendo colla penna un tratto AB, *ovvero* DE, *il segno* A, *da cui principia, e l'altro* B, *in cui termina, è un* PUNTO, *di cui non può determinarsi parte veruna, perchè se fosse divisibile, non sarebbe tutto il principio, nè tutto il fine di questo semplice tratto, il quale è una* LINEA AB *distesa in lungo da un termine all'altro, ma senza larghezza, perchè quantunque la grossezza della punta della penna, da cui fu segnata, le abbia data qualche piccola estensione in largo, questa non dee attendersi, ma solamente l'estensione in lungo da un termine all'altro: in quella maniera, che misurandosi l'altezza di varie torri, non si fa conto della loro larghezza, ma solamente si considera l'estensione in lungo dal piano, sopra cui posano, alle loro sublimi punte. Dicesi poi* AB LINEA RETTA, *perchè ancora qualunque punto* C, *in cui può dividersi, è interposto direttamente fra i termini* A, B, *nè veruno di quei punti intermedj si diverte a destra,*

o a

una sola parola sforzatamente, per esprimere la greca, cioè una lunghezza senza larghezza; perciocchè il punto, se noi gli diamo parti subito è un'altra cosa, e passa nella linea; se la linea, che altri disse *scorsa di punti*, prende larghezza, ecco che n'esce superficie, e va discorrendo.

(a) Questa Definizione è d'Euclide. Archimede poi definì la linea retta *quella, ch'è la minima di tutte quelle linee, le quali hanno i medesimi termini*; oppure *è la più breve di tutte le linee, che possono condursi tra due punti*. Dalla Definizione IV. d'Euclide rilevasi l'altra della linea *Curva*, che *è quella, la quale non si distende ugualmente tra' suoi punti, ma s'inalza, o si abbassa tra le sue estremità*; come ancora si viene in chiaro della Definizione della linea chiamata *Mista*; ed *è quella, una di cui parte è retta, l'altra è curva*. Onde di tre sorte è la linea; Retta, Curva, e Mista.

o a finistra, e però si distende egualmente essa linea fra i punti estremi; a differenza dell'altra linea DE (*che chiamerebbesi* LINEA CURVA) *la quale non è ben tesa al pari fra l'uno, e l'altro dei suoi termini* D, E, *ma dividendosi in qualunque punto* F, *si vede questo distratto a destra, o a sinistra, più di un altro punto* G, *in cui può altrove dividersi, e però si vede piegata questa linea in un seno, e non distesa direttamente, come l'altra* AB; *qual'è la minima, che si possa descrivere fra i medesimi termini* A, B.

V. SUPERFICIE dicesi l'estensione in lunghezza, e in larghezza senza veruna profondità.

VI. E se la superficie è terminata, i suoi ESTREMI sono le linee, in cui finisce.

VII. Dicesi PIANA quella superficie, che giace distesa egualmente tra le sue linee. (a)

FIG. 2. *Così l'estensione* ABCD, *la cui lunghezza è* AB, *e la sua larghezza* BC, *è una* SUPERFICIE, *la quale, se non ritorna in se stessa, come è quella di una palla rotonda, ma è terminata, ha per suoi* TERMINI, *o* ESTREMI *quelle linee, da cui è circondata, o sieno rette, come* AB, BC, CD, AD, *da cui è confinata la superficie* ABCD, *o sieno parte rette, e parte curve, come la superficie* ADEF, *ovvero l'altra* FBCE, *di cui la curva* FE *è uno degli estremi; o da più curve, o da una curva sola, da cui fosse circoscritta. E se detta superficie*

A 2 ABCD,

(*a*) Delle superficie piane altre sono *Rette*, altre *Curve*, ed altre *Miste*. Le superficie rette sono contenute da linee rette, qual'è la superficie ADCB (*Fig.* 2.); le superficie curve da una, o più linee curve, com'è la superficie HLG (*Fig.* 3); le miste da linee rette insieme, e curve, com'è la superficie ADEF (*Fig.* 2.).

ABCD *tra le sue linee estreme è così egualmente distesa, come un velo per ogni verso ben tirato, che in veruna parte non si avvalli, dicesi* PIANA, *a differenza d'un altra superficie* GNLH, *che è come una vela gonfia dal vento, e da varie linee* HI, HM, HK *divisa, le quali non si trovano egualmente giacenti, ma alcune più alte, ed altre più basse.*

FIG 3.

VIII. L'ANGOLO PIANO è ciò, che risulta dall' inclinazione di due linee (a), le quali nella superficie piana s' incontrino in un punto (b), e non sieno poste per diritto fra loro. (c)

IX. Se le linee contenenti l'angolo saranno amendue rette, dirassi tale angolo RETTILINEO.

X. Stando una linea retta sopra di un'altra in maniera, che non penda più da questa, che da quella parte, dirassi PERPENDICOLARE alla linea soggetta.

XI.

(a) Tali linee diconsi anche *Lati* dell' angolo, come sono nella *Fig.* 4. le linee EC, BC.

(b) Questo suole addimandarsi *Vertice*, *Cima*, o *Punta* dell' angolo, qual' è nella *Fig.* 4. il punto C dell' angolo ECB.

(c) Qui è da avvertirsi, che se nel punto C (*Fig.* 2.) due sole linee DC, BC insieme concorrano, e formino un solo angolo; allora dovendosi nominare quell' angolo, con una sola lettera si potrà indicare, dicendosi *l' angolo* C. Ma se nel punto C (*Fig.* 4.), ove concorrono le due linee DC, BC, venga a cadere una terza linea EC; in tal caso al punto C formeransi due angoli, ciascun de' quali si nomina con tre lettere DCB, ECB in modo, che la lettera C, che stà al vertice, si collochi nel mezzo dell' altre due; e allora la stessa cosa è dire l'angolo DCB, che dire l'angolo, il quale dalle due linee DC, CB viene compreso. E' inoltre da notarsi, che la maggiore, o minor lunghezza delle linee non ingrandisce punto, nè impiccolisce l'angolo, il quale non dalla lunghezza, ma dalla inclinazione di due linee è misurato. Per lo che è l' istesso il dire (*Fig.* 2.) l'angolo DCB, che l'angolo ECB.

XI. E ciascheduno degli angoli uguali, che di quà, e di là ne risultano, chiamerassi ANGOLO RETTO. (a)

XII. L'angolo poi maggiore del retto dirassi ANGOLO OTTUSO, ed il minore del retto, ANGOLO ACUTO.

Le rette AC, BC, *che s' incontrano per diritto nel punto* C, *non fanno un angolo, ma una medesima linea retta; le linee poi* EC, BC, *di cui l' una è inclinata all' altra, costituiscono l'* ANGOLO PIANO ECB (*nominando qualunque angolo, si porrà sempre nel mezzo il punto, in cui le linee s' incontrano, e negli estremi l' uno, e l' altro termine di esse linee, come quì si è detto* ECB, *di cui la lettera di mezzo* C *indica il punto, in cui si fa l' angolo, e le altre due* E, B *indicano gli estremi delle linee, che lo comprendono*) *ed è* ANGOLO RETTILINEO, *essendo ambe le linee* CE, CB *rette; che se fossero curve, si direbbe* CURVILINEO; *se una retta, l' altra curva*, MISTILINEO. *In quanto poi alla linea* DC, *che insiste nel punto* C *sopra la retta* AB, *non essendo più inclinata da una parte, che dall' altra, si chiama* PERPENDICOLARE *essa* DC *alla soggetta* AB; *e ciascuno degli angoli, che risultano eguali dall' una, e dall' altra parte*, DCA, DCB, *dicesi* ANGOLO RETTO; *ma l' angolo* ECA, *che comprende il retto* DCA, *e però è maggiore di esso, si dirà* ANGOLO OTTUSO; *e l' angolo* ECB, *che*

FIG. 4.

(a) Ma facendo la linea EC (*Fig.* 4.) sopra l' AB angoli disuguali, da una parte l' angolo ECA maggiore, dall' altra ECB minore; si dirà essa linea EC *Obliqua* sopra l' altra AB.

che è una parte dell' angolo DCB, *e però è minore del retto, si chiamerà* ANGOLO ACUTO. (a)

XIII. FIGURA dicesi quell' estensione, che da uno, o più termini è circoscritta, i quali TERMINI sono gli estremi (b), da cui è confinata.

XIV. Delle figure comprese da linee curve, che CURVILINEE si nominano, la più semplice è il CERCHIO, o CIRCOLO (c), che è una figura piana

(a) Quindi se ne inferisce primieramente, che l' angolo piano in riguardo alle linee, che lo contengono, si divide in Rettilineo, Curvilineo, e Mistilineo; secondariamente che l' angolo piano rettilineo in riguardo all' inclinazione di esse linee o è Retto, o Acuto, oppure Ottuso.

(b) La somma degli estremi, o de' *lati*, dai quali è compresa la figura piana, chiamasi *Perimetro*, o *Contorno*: e qualora i lati di esso perimetro sieno tutti uguali, la figura dicesi *Regolare*; quando poi sieno disuguali, *Irregolare*. La Figura piana è di tre sorte: *Curvilinea*, che è quella contenuta da una sola linea curva; e tra queste figure curvilinee nella Planimetria Elementare, o speculativa non avvi altra, che è il *Cerchio*: *Rettilinea*, che è compresa da linee rette, com' è il Triangolo &c. e *Mistilinea*, ch' è contenuta da linee rette e curve insieme; quale sarebbe il Semicerchio &c

(c) In due maniere le linee, e le figure geometriche adoprare si possono, e sono state adoprate di fatto. La prima è quella degli Egiziani, i quali usi eran di esprimere per linee, e figure geometriche le loro nozioni Filosofiche, o Teologiche. Per mezzo di quelle rappresentavano le operazioni divine ed umane, le generazioni, le distruzioni, le mutazioni de' corpi, come osserva Gale Philos. Gener. l. 1. c. 2. Fra tutte le figure affettavano i cerchj, ed i triangoli. Co' cerchj Ermete simboleggiò la Divinità. Ma questa prima maniera o è affatto ideale e simbolica, o se in alcun modo esprime la cosa rappresentata, non la esprime scientificamente, talchè dalla espressione medesima se ne possano arguire legittimamente le proprietà ignote di ciò, che viene espresso. Questa seconda maniera è propria soltanto de' Geometri, e non è stata mai adoperata tanto, quanto nella moderna Filosofia. Poichè tutte quelle cose, che sono

na compresa da una sola linea curva, che ritorna in se stessa (e chiamasi CIRCONFERENZA, o PERIFERIA) (a) a cui tirate quante si vogliono linee rette dal medio punto dentro il piano di essa figura, tutte fra di loro riescono uguali. (b)

XV.

sono suscettibili del più, e del meno; o questo sia di durata, com'è nel tempo; o sia d'attività, com'è nella forza, nella velocità, nelle passioni, ed in altre simili cose; tutte per linee, per superficie, per solidi sono state scientificamente rappresentate in guisa, che se ne deducano ora chiarissime spiegazioni di cose recondite, ora esattissime misure delle affezioni, e proprietà dei corpi.

(a) La circonferenza o periferia di qualunque cerchio suole da' Geometri dividersi in 360. parti uguali, che con nome speciale *gradi* si appellano: ogni grado dividesi in 60. *minuti primi*: e ciascuno di essi in 60. *minuti secondi*, e così vadasi discorrendo. La semicirconferenza adunque sarà divisibile in 180. gradi: e la quarta parte della circonferenza, o dir vogliamo il *quadrante* ne conterrà soli 90. Quindi comprendesi, per qual ragione l'angolo retto sia comunemente riputato uguale a 90. gradi. Poichè condotti nel cerchio due diametri, che a vicenda si seghino ad angoli retti; è manifesto, ch'essi divideranno la circonferenza in quattro parti uguali, che *archi* si nominano: frattanto insistendo due semidiametri, o raggi sopra la quarta parte della circonferenza istessa; è chiaro, che l'angolo al centro del cerchio, il qual'angolo è opposto a questa quarta parte, comprenderà tanti gradi, quanti appunto sono quelli contenuti dalla medesima quarta parte della circonferenza; e perciò l'angolo retto, che ha per misura una porzione di circonferenza di 90. gradi, sarà uguale a 90. gradi; onde l'angolo ottuso sarà sempre maggiore, e l'acuto minore di gradi 90., secondo che quello, o questo insiste, ed ha per misura una porzione o un arco di cerchio maggiore, o minore di 90. gradi.

(b) Per dare un'idea della generazione del cerchio, e della di lui natura, che ad Aristotele sembrò oltre modo maraviglios; se la retta linea C A (*Fig.* 5.) con uno de' suoi estremi C, il quale stia fisso ed immobile, si ravvolga in giro; quella retta produrrà il cerchio, e l'altro estremo mobile A produrrà la circonferenza di esso. Mirabile poi si è la natura del cerchio anche

XV. Quel punto, da cui si spiccano le linee tutte uguali, dicesi CENTRO.

XVI. E qualunque retta linea, che passi per esso centro, e termini alla circonferenza da ambe le parti opposte, dicesi DIAMETRO.

XVII. La Figura compresa da esso diametro, e dalla parte di circonferenza segata da esso, chiamasi SEMICIRCOLO, o MEZZO CERCHIO.

FIG. 5. *Si descrive questa figura con un compasso di due gambe aperte a qualche intervallo, tenendo fissa nel punto* C *la punta di una gamba, e facendo girare l' altra nel piano, in cui si disegnerà la curva* A D B F, *che ritorna in se stessa; così questa figura sarà un* CIRCOLO, *o* CERCHIO; *la curva, da cui è terminata, dirassi* CIRCONFERENZA, *o* PERIFERIA; *il punto* C *sarà il* CENTRO, *e tutte le rette* C E, C D, C F, *&c. saranno eguali, e si diranno* RAGGI, *o* SEMIDIAMETRI; *e tutta l' intera retta* A B *tradotta pel centro, si dirà* DIAMETRO; *e la figura* A D B SEMICIRCOLO, *o* MEZZO CERCHIO.

XVIII. Le figure poi contenute da linee rette chiamansi RETTILINEE, delle quali la più semplice è quella, che da tre linee rette comprendesi (a), e si chiama TRILATERA FIGURA, ovvero TRIAN-

che nell' istesso suo nascimento. Poichè alla generazione di lui vi concorrono cose del tutto contrarie, cioè il moto, e la quiete; mentre si muove la linea, ed una di lei estremità sta in quiete. Quindi la circonferenza è composta in certo modo di cose contrarie, vale a dire di estremi senza mezzo, costando ella di concavo, e di convesso. Quello poi, che reca maggior maraviglia si è, che tali cose tra loro opposte e contrarie in una linea realmente ritrovansi, che non ha veruna larghezza.

(a) Due sole rette linee non possono formare una figura, perchè o sono del tutto staccate, come A B, C D (*Fig.* 10.) ed in tal caso riesce lo spazio

TRIANGOLO; se poi si racchiude da quattro rette linee, si dirà FIGURA QUADRILATERA, e se da più di quattro, MOLTILATERA.

XIX. Di esse figure Trilatere quella, che ha tre lati uguali, chiamasi TRIANGOLO EQUILATERO.

XX. Quella poi, che ha due soli lati uguali, dicesi TRIANGOLO ISOSCELE, o EQUICRURE.

XXI. E quella, che sarà compresa da tre lati disuguali, si dirà TRIANGOLO SCALENO.

XXII. Si possono ancora denominare dagli angoli, de' quali se uno in essa figura Trilatera è retto, si dirà TRIANGOLO RETTANGOLO; se uno è ottuso, chiamerassi OTTUSIANGOLO; se tutti acuti, dirassi ACUZIANGOLO.

FIG. 6.

Essendo le rette linee A B, B C, A C *eguali, il triangolo* A B C *dicesi* EQUILATERO; *e se i lati* D E, D F *solamente sieno uguali, dicesi il triangolo* D E F ISOSCELE, *o* EQUICRURE; *ed essendo tutti i lati* G H, HI,

zio di quà, e di là aperto; o convengono in un sol punto C (*Fig.* 4.,) come A C, C D, ed allora riesce lo spazio aperto dalla banda opposta al loro concorso; o finalmente se in due punti A, B (*Fig.* 10.) concorrano due linee rette B A, A B, riusciranno adattate in una istessa lunghezza senza comprendere spazio veruno, essendo l' una soprapposta all'altra, ed esattamente congruente con quella. Due linee curve però G H L, G V L, (*Fig.* 3.) oppure una retta A B (*Fig.* 5.) con la curva A F B, o ancora una sola curva (*Fig.* 5. *medesima*) A D B F, che ritorni in se stessa, possono formare una figura, comprendendosi tra esse lo spazio per ogni verso. Perchè adunque non possono due linee rette produrre una figura, almeno tre rette linee A B, A C, C B (*Fig.* 6.) conviene, che si connettano co' loro termini per formare la figura A B C, che dicesi *Triangolo rettilineo*, il quale prende le varie sue denominazioni, o da' lati, o dagli angoli, come rilevasi dalle quattro seguenti Definizioni X X. XX. XXI. XXII.

HI, IG *disuguali sarà il triangolo* HGI SCALENO. *Se poi l' angolo* KLM *fosse retto, sarebbe* KLM *un triangolo* RETTANGOLO; *ed essendo l'angolo* GHI *ottuso, il triangolo* GHI *si dirà* OTTUSIANGOLO; *ma essendo tutti gli angoli acuti, come in* ABC, *e in* EDF, *si dirà ciascuno di essi triangolo* ACUZIANGOLO.

XXIII. Delle Figure poi Quadrilatere, quella che ha tutti i lati uguali, e ciaschedun angolo retto, si chiama QUADRATO.

XXIV. Quella poi, che non ha ciascun lato eguale, e però è bislunga, ma ha tutti gli angoli retti, dicesi RETTANGOLO.

XXV. Quella, che ha tutti i lati eguali, ma gli angoli non retti, chiamasi ROMBO.

XXVI. Quella poi, che ha solamente i lati opposti, e gli angoli opposti eguali, ma non è equilatera, nè rettangola, si nomina ROMBOIDE.

XXVII. L' altre figure poi quadrilatere, che non hanno tali condizioni, si dicono TRAPEZII. (a)

Si vede l' esempio del QUADRATO *nella figura* ABCD, *e del* RETTANGOLO *nell' altra* FGHE, *siccome del* ROMBO *nella* IKLM, *e della* ROMBOIDE *nella seguente* NOPQ, *siccome del* TRAPEZIO *nel quadrilatero* RSTV.

FIG. 7. FIG. 8. FIG. 9.

XXVIII. Si dicono tra di loro PARALLELE quelle linee rette, che giacendo nella stessa superficie piana, ancora che si prolungassero in infinito verso qualunque parte, mai converrebbero insieme. (b)

Tali

(a) Potrà definirsi il *Trapezio*: una figura quadrilatera, a cui non si compete alcuna di quelle proprietà, che si convengono all' altre figure quadrilatere di sopra divisate.

(b) Questa definizione da Euclide assegnataci è da alcuni

Tali sono le rette A B, C D, *che tanto a destra, quanto a sinistra prolungate non concorrono in verun punto, anzi mantengono sempre la stessa distanza tra loro, e però diconsi* PARALLELE: *e così sono i lati opposti delle prime quattro specie di Quadrilateri, cioè del Quadrato, del Rettangolo, del Rombo, e della Romboide, i quali ancora generalmente diconsi* PARALLELOGRAMMI, *per avere qualunque paio di lati opposti, tra di loro paralleli* (a).

FIG. 10.

DI-

tuni ripresa, perchè possono darsi due linee, che non mai concorrano insieme, e con tutto ciò non sieno parallele. Tali sono l'Iperbole, e l'Asintoto, che quantunque esse linee prolungate si accostino fra loro, e non sieno per conseguenza parallele, non però mai si toccano, nè insieme concorrono. E' da avvertirsi peraltro, che Euclide parla quì di rette, e non di curve, com'è l'Iperbole; onde non è in ciò riprensibile Euclide. Altri Geometri poi definirono le *parallele*, quelle linee rette, che conservano sempre tra loro la medesima distanza.

(a) Da ciò se ne inferisce, che il Parallelogrammo ha sotto di se, come tante sue specie, il quadrato, il rettangolo, il rombo, la romboide. Onde i sommi generi delle figure quadrilatere sono due, il Parallelogrammo, e il Trapezio. Poichè le figure quadrilatere o hanno i lati opposti paralleli, e diconsi parallelogrammi; o non gli hanno, e si addimandano trapezj.

Dopo le Definizioni fin quì assegnate da Euclide, non è da omettersi un'altra, qual è quella dell'*angolo esterno* della figura rettilinea, il quale si difinisce: *quello, che nasce fuori della figura rettilinea, producendo un suo lato*. Così nella *Fig.* 12., ch'è il triangolo D B A, producendo il lato D A fino al punto L, nascerà l'angolo esterno B A L. Sicchè l'angolo esterno è prodotto da due lati di qualunque figura rettilinea, uno de' quali è prolungato, e l'altro nò. Parimente tanti saranno gli angoli esterni, quanti sono i lati della figura. Ed ecco proposte, e spiegate le definizioni della Planimetria Teoretica Elementare, le quali fà d'uopo, che il novello Geometra se le renda familiarissime.

DIMANDE. (a)

I. Si ammetta, che da qualunque punto a qualsivoglia altro punto possa tirarsi una linea retta.

II. E qualsivoglia data linea possa prolungarsi in infinito, quanto sarà di bisogno.

III. E da qualunque punto, come centro, con qualsivoglia intervallo, che determini il raggio, cioè la distanza della circonferenza dal centro, si possa descrivere un cerchio.

ASSIOMI. (b)

I. Quelle cose, che sono uguali ad una terza, sono ancora eguali fra loro.

II. Se alle cose uguali si aggiungono, o si levano

(a) Al secondo genere de' principj geometrici riferir si debbono le *Dimande* chiamate con altro nome *Postulati*, o *Petizioni*, colle quali dimandasi di fare qualche operazione, cui ciascuno si persuade essere possibile, e fattibile; come per cagion d'esempio di poter condurre una linea, descrivere un cerchio, ed altre somiglianti cose possibili, e a farsi assai piane.

(b) Il terzo, ed ultimo genere de' principj mattematici dopo le Definizioni, e le Dimande contiene gli *Assiomi*, che altrimenti diconsi *Nozioni Comuni*; da Cicerone con voci latine *Pronunciata*, ed *Effata*; da Aulo Gellio lib. 16 Noct. Attic. c. 7. *Sentenze, in cui nulla di più chiaro puotesi desiderare*; e Sallustio de Diis, & Mundo c. 1. scrive, essere gli Assiomi *Sentenze, che da tutti gli uomini si tengono per vere*. Gli Assiomi adunque sono verità a tutti notissime, alle quali ognuno che intenda la forza delle parole, non può non acconsentire. La differenza pertanto, che passa tra le dimande, e gli assiomi consiste in questo, che quelle risguardano una operazione; questi contengono una qualche verità. Due condizioni però, al dir di Cartesio in Præf. seu Epistol ad Principiorum Philosophiæ Interpretem Gallicum, ricercansi negli Assiomi, o Principj: primieramente che sieno chiarissimi; secondariamente che da essi tutte le altre cose possano dedursi.

vano altre eguali, o una medesima ad ambedue comune, ne risultano complessi, o residui uguali.

III. Se alle cose disuguali si aggiungono, o si detraggono cose eguali, o una stessa ad entrambi comune, rimangono gli aggregati, o i residui disuguali, come prima.

IV. Le cose, che sono il duplo, o la metà di una medesima, o di eguali cose, sono pure tra di loro uguali.

V. Le cose, che sovrapposte si combaciano esattamente, sono altresì uguali. (a)

VI. Il tutto è maggiore di qualunque sua parte, ed è uguale alla somma di esse.

VII. Tutti gli angoli retti sono tra di loro uguali.

VIII. Se due linee rette sieno segate da una terza, in maniera, che da una parte ne risultino due angoli interni minori di due retti, e dall' altra banda maggiori, prolungate in infinito quelle due rette dalla banda, ove sono gli angoli minori, dovranno insieme concorrere. (b)

La

(a) Soggiugne quì il P. Clavio, che quelle cose, che sono uguali, sovrapposte le une all' altre si combaciano esattamente. Una tale generica asserzione però è falsa; poichè le grandezze dissimili possono essere uguali, e non combaciarsi perfettamente, come vedrassi nel sesto libro di questi geometrici elementi: e perciò le sole figure simili, ed uguali potranno esattamente combaciarsi, come i quadrati, ed i cerchi uguali si combaceranno scambievolmente, e perfettamente; e l' istesso pure succederà delle linee rette uguali, e degli angoli rettilinei uguali.

(b) Questo Assioma non è certamente più chiaro di ciò, che dimostra Euclide nella Proposizione XXIX. del primo libro; vale a dire che se i due angoli interni (*Fig.* 33.) dalla medesima parte AGH, CHG sieno uguali a due retti, le linee rette AB, CD

non

La verità, ed evidenza di questo Assioma si mostrerà dopo la Proposizione 28. del lib. 1. e sarà allora più agevolmente intesa.

IX. Due linee rette non comprendono interamente spazio veruno.

X. Incontrandosi due linee rette in un punto, si segano, è non vanno insieme per verun tratto di lunghezza, che possa essere un segmento comune ad ambedue, ma subito si separano l'una dall'altra. (a)

AVVERTIMENTO. (b)

Alcune proposizioni della Geometria si chiamano PROBLEMI, *quando in esse si propone qualche cosa pra-*

non concorreranno mai insieme. Quindi è, che l'Assioma proposto non fu riconosciuto per tale da Gemino, da Proclo, e da altri molti Geometri, ma piuttosto per un Teorema, che di dimostrazione abbisogni.

(a) In questo ultimo Assioma si vuole significare, che due Rette, le quali insieme s'incontrino, non possono avere un segmento comune, ma tutte s'intersegano in un sol punto. Sia (*Fig.* 25.) la linea AE, che s'incontri colla linea CE nel punto E, e faccia angolo; si afferma non potersi trovare una linea EB talmente tirata sotto il punto E, che sia porzione comune della linea AE, e dell'altra CE per tal modo, che tanto la linea AEB, quanto l'altra CED sieno una linea diritta. Poichè per essere diritta, e non piegata la CE, conviene, che si stenda verso D; per essere diritta l'AE, conviene, che essa vada verso B.

(b) Prima di dimostrare la prima Proposizione degli Elementi, non è da ignorarsi da chiunque s'è già impossessato de' principj geometrici, che tutto quello, che si propone da farsi praticamente, e da dimostrarsi, viene sotto il nome generico di *Proposizione*. Quindi ne segue che la Proposizione o è *Problematica*, e chiamasi assolutamente *Problema*, o è *Teorematica*, e dicesi *Teorema*. Ciascuna Proposizione contiene sei parti, che sono inalterabilmente ad essa congiunte, il

pratica da farsi. Altre si dicono TEOREMI, *ne' quali solamente si espone qualche verità speculativa da dimostrarsi. In ciascuna di tali proposizioni conviene distinguere il* DATO, *e il* QUESITO, *perchè*

⊙ *sem-*

il *Dato*, il *Quesito*, la *Costruzione*, la *Determinazione*, la *Dimostrazione*, la *Conclusione*. Avvi ancora il *Corollario*, che può essere alla proposizione connesso.

Di tutti questi termini convien darne la giusta idea, per non lasciar cosa alcuna, che arrecar possa la minima oscurità, o sia per essere nell' immaginazione d' alcuno causa d' errore.

I. *Problema* adunque benchè nel linguaggio dialettico, o volgare denoti alcuna cosa, di cui pel sì, e pel nò congetturalmente, e ambiguamente discorresi; non ostante nel linguaggio geometrico significa un' operazione, e raziocinio indirizzato a far qualche cosa praticamente. Se per cagion d' esempio intorno ad una linea terminata si tirino (come fassi nella Proposizione I. del primo libro) tali linee, e tali cerchi, per le quali linee, e per i quali cerchi venga fatto di descrivere un triangolo equilatero; e che tale egli sia, evidentemente conchiudasi; una sì fatta operazione, e discorso è un *Problema*.

II. Che se l'operazione, ed il raziocinio sia indirizzato [illegible] far palese una qualche proprietà di questa, o di quella figura, e nella contemplazione si posi di qualche verità da dimostrarsi, questo addimanderassi *Teorema*. Così nella Proposizione IV., qualora si dieno due triangoli aventi un angolo uguale ad un angolo, e i due lati contenenti l' angolo del primo triangolo uguali agli altri due contenenti l' angolo del secondo, e quindi concludentemente dimostrisi, esser la base del primo uguale alla base del secondo triangolo, con quel che segue; un tale artifizio e discorso sarà un *Teorema*.

III. IV. Dal fin quì esposto sembra potersene dedurre primieramente, (e con ciò si viene anche a spiegare altri due termini di sopra mentovati) che in qualunque Problema due cose distinguer si debbono: I. Il *Dato*, II. il *Quesito*; poichè oltre quello, che cercasi di fare nel Problema, vi si contengono altresì certe condizioni, dalle quali si viene a determinare il quesito istesso: onde il Dato non è altro, che una condizione, un supposto d'una cosa già nota: il Quesito poi è ciò, che si cerca di fare. Il Dato alle volte determina quello, che cercasi nel pro-

ble-

sempre, date alcune cose, si cerca, o di farne alcune altre ne' Problemi, o di mostrarne altre ne' Teoremi. Inoltre occorre per lo più di fare qualche operazione sopra il Dato, per eseguire il proposto ne'

blema, e alle volte non lo determina: di quì ne risulta la divisione del Problema, che altro è *determinato*, altro *indeterminato*. Così la Proposizione problematica XLII. del primo libro, nella quale si propone, che dato un triangolo debba formarsi un parallelogrammo uguale in un dato angolo rettilineo, è indeterminata; poichè per mezzo di questi due dati del problema non si viene a determinare il parallelogrammo ricercato. Al contrario poi la Proposizione problematica XLIV. del libro istesso, la quale ci propone, che ad una data retta applicar si debba in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale ad un dato triangolo, è determinata; mentre da questi tre dati si determina il ricercato parallelogrammo.

Deducesi secondariamente, che in ogni *Teorema* pure debbansi distinguere due cose, I. l'*Ipotesi*, o il *Dato*; II. la *Conclusione*. L'Ipotesi è ciò, che si assume, o si suppone come già noto: la Conclusione è ciò, che dalla supposizione, o dall'assunto se ne inferisce. Che nella Proposizione IV. sopraccitata i due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, i due lati contenenti l'angolo uguali anch' essi in ambedue triangoli; questa è l'*Ipotesi*. Che poi la base del primo triangolo sia uguale alla base del secondo, gli angoli rimanenti dell' uno sieno respettivamente uguali a' rimanenti angoli dell' altro, ed il triangolo primo uguagli in tutto e pertutto il secondo; essendo tutto ciò una conseguenza risultante dall' ipotesi pocanzi addotta, dee considerarsi come la *Conclusione* del prenominato Teorema.

E' in terzo luogo da osservarsi, che il Teorema è *semplice*, ovvero *composto*.

Semplice, quando in esso o una sola cosa dimostrasi, oppure essendo più, da una medesima ipotesi ne derivano. Per lo che semplice dovrà dirsi tanto la Proposizione VI., quanto la XXIX. del primo libro degli Elementi; poichè in quella provasi una cosa sola; in questa tre certamente se ne dimostrano, ma tutte da una stessa ipotesi se ne inferiscono. *Composto* per lo contrario dee dirsi quel Teorema, in cui più cose si provano non derivanti da una medesima ipotesi. Tale sarebbe la Proposizione XXVI., in cui tre cose dimostransi da varie ipotesi provenienti.

Il

nei Problemi, o per fare strada alla dimostrazione di Teoremi, e questa dicesi COSTRUZIONE, *a cui poscia segue la* DETERMINAZIONE *del quesito, e indi la* DIMOSTRAZIONE, *che è la parte principale*

B

Il Teorema semplice suol parimente suddividersi in due specie, altro essendo *Complesso*, ed altro *Incomplesso*. Si dirà *Incomplesso*, qualora l' ipotesi, e la conclusione di lui una sola cosa contenga, com' è la Prop. XVII del libro primo. Sarà *Complesso*, quando o la sola ipotesi, o la sola conclusione, oppure l' una, e l' altra contiene più cose: riguardo alla sola ipotesi è complessa la Prop. XXXV.: riguardo alla conclusione la Prop. V.: finalmente riguardo all'una, e all' altra, la Prop. VI. del primo libro.

V. Dopo la spiegazione dei termini Dato, e Quesito, ne segue la dilucidazione dell' altre, cioè della *Costruzione*. In ogni Problema, o Teorema vi è, o si suppone già fatta la *Costruzione*, che è un' operazione, la quale si aggira in condurre linee, cerchi, semicerchj, in segare angoli, linee, piani; e richiedesi o per dimostrare la proprietà enunciata della figura ne' Teoremi, o per eseguire il già proposto nei Problemi. Essa costruzione chiamasi anche con greco vocabolo *Sintesi* sebbene però sì l' una, come l' altra voce presa talvolta in senso più esteso, e contrapposta all' *Analisi*, o al' calcolo letterale, significa l' istesso, che *Geometria*; talche dicendosi un Problema sciolto per sintesi, per Costruzione, vuolsi intendere sciolto coll' uso della pura Geometria.

VI. Alla Costruzione ne succede la *Determinazione*, e di poi la *Dimostrazione*. Poichè fatta l' opportuna operazione per eseguire ciò che si propone da farsi praticamente ne' Problemi, o per agevolare la strada alla dimostrazione ne' Teoremi; si viene a determinare, e fissare quello si cerca di fare ne' primi, o di provare ne' secondi: e questo appunto si appella *Determinazione*.

VII. Quindi si passa alla *Dimostrazione*, che è come l' anima della Proposizione, e si definisce un'evidente ragione, onde conchiudesi, o esser vero il Teorema proposto, o esser eseguito il Problema cercato. Questa è di due sorte; una *diretta*, o *positiva*; *indiretta*, o *negativa* l'altra. Chiamasi in primo luogo *diretta*, quando dimostrasi qualche cosa per i suoi principj, cioè quando dentro la dimostrazione si mettono in uso proposizioni tali, che da esse ne derivi direttamente ciò, che

fa

pale di tutte le proposizioni finalmente la CONCLUSIONE *di ciò, che si dovea fare, o dimostrare. Noi distingueremo ciascuna di queste parti nella Proposizione prima, che è il primo Problema; e nella quarta, che sarà il primo Teorema, per poterle distinguere, come potrà fare qualunque discreto, ed attento Lettore nell' altre proposizioni, in cui non accaderà darne veruno indizio, per essere più succinti.*

Ne' titoli delle proposizioni problematiche si aggiun-

fa d' uopo provare. Di questo genere appunto sarebbe la Prop. V. del libro primo più volte mentovato. Dicesi in secondo luogo *indiretta*, *negativa*, o anche *per impossibile*, qualora si dimostri una cosa per qualche assurdo o inconveniente, che ne seguirebbe, se la cosa fosse diversamente da ciò, che fu stabilito. Di tal natura si è la Prop. VI. del libro stesso, mentre dimostrasi, che se in un triangolo avente due angoli uguali, i lati opposti a detti angoli non fossero uguali, ne seguirebbe l' assurdo, o l'inconveniente, che il tutto sarebbe uguale ad una sua parte; la qual cosa è impossibile, per esser contraria all'Assioma sesto. La dimostrazione indiretta si appoggia sù questo principio, che sebbene da un'ipotesi falsa possa talvolta inferirsene qualche verità; da un' ipotesi però vera non se ne può mai dedurre una cosa falsa. Lo che è di per se stesso manifesto; poichè non per altro viziose esser possono le dimostrazioni, cioè le illazioni de' conseguenti dagli antecedenti, se non perchè o gli antecedenti separatamente considerati non sono veri, o i conseguenti non sono legittimamente dedotti dagli antecedenti. Laonde ogni volta che da una ipotesi qualche cosa per legittima illazione se ne rileva, ciò non per altra ragione può esser falso, se non perchè l' ipotesi stessa è falsa.

VIII. Venendo io ora all' ultima parte della Proposizione, qual' è la *Conclusione*; questa, come abbiamo di sopra divisato, non altro è, che la conseguenza, o per dir meglio la conferma di ciò, che noi ci eravamo proposti di fare nel Problema, o di provare nel Teorema.

IX. Dalla Proposizione già dimostrata alle volte se ne deduce uno, o più *Corollari*. Il *Corollario* è un Teorema, o un Problema, che dalla costruzione, e dimostrazione della Proposizione primaria deriva.

giungerà il vocabolo di PROBLEMA; *e quello di* TEOREMA *si metterà solamente nel primo, e non nell' altre Proposizioni, che si sopporranno tutte Teorematiche, quando non vi è apposta la parola di* PROBLEMA.

COROLLARIO *poi dicesi ciò, che si deduce dal già dimostrato nella precedente proposizione.*

PROPOSIZIONE I. (a) PROBLEMA.

FIG. II.

Sopra una data retta linea terminata AB *costituire un Triangolo equilatero.*

Dato. Quesito.

DAL centro *A*, coll' intervallo *AB*, descrivasi il cerchio *BCD*, a; e similmente dal centro *B*, coll' intervallo *BA*, descrivasi un altro cerchio *ACE* a. E dal punto *C*, in cui s' incontreranno le loro circonferenze, agli estremi punti *A*, *B* della data linea *AB*, si conducano le rette linee *CA*, *CB* b. Dico, che il triangolo *ABC* quindi resultante, sarà Equilatero. Essendo *A* il centro del cerchio *BCD*, sarà *AC* uguale ad *AB* c; ed

Costruzione.

a *Dimanda 3.*

b *Dimanda 1.*

Determinazione

c *Definizione 14.*

B 2

(a) In queste prime otto Proposizioni Euclide tratta de' triangoli piani, e insieme spiega la natura degli angoli piani: dipoi assegna il modo di segare per mezzo gli angoli stessi, e le linee; e di alzare, o di condurre le perpendicolari: quindi passa a mostrare altre proprietà sì de' triangoli, sì delle linee parallele o equidistanti. Nella XXXIV., e seguenti espone le proprietà dei quadrilateri e specialmente dei Parallelogrammi; e fa vedere, come possano ridursi i Poligoni a rettangoli, o a parallelogrammi, ed anche a triangoli. Finalmente chiude questo primo libro con i due celebratissimi Teoremi Pittagorici. Fra le proposizioni più illustri di questo libro, sette se ne contano, e sono le seguenti: la XXXII. XXXV. XXXVII. XLI. XLIV. XLV. XLVII.

Dimoſtrazione

ed eſſendo ancora *B* centro del cerchio *ACE*, ſarà pure *CB* uguale ad *AB* [a]. Dunque le due *AC*, *CB* ſono altresì uguali tra di loro [b]; e però tutti tre i lati del triangolo *ABC* eſſendo uguali, ſarà eſſo triangolo Equilatero [c]. Adunque ſopra la data retta linea *AB* ſi è formato il triangolo equilatero; il che ſi era propoſto di fare.

Concluſione

a *Definizione* 14.
b *Aſſiom.* 1.
c *Defin.* 19.

PROPOSIZIONE II. PROBL.

FIG. 12.

Dal dato punto A *tirare una linea retta* AL *uguale ad un' altra data* BC.

TIriſi la retta *AB* [d], e ſopra di eſſa formiſi il triangolo equilatero *ABD* [e], i di cui lati *DB*, *DA* ſi prolunghino indefinitamente [f], e col centro *B* all' intervallo *BC*, deſcrivaſi il cerchio *CH* [g] ſegante il lato prolungato *DB* in *G*. Poſcia col centro *D* all' intervallo *DG* ſi deſcriva l' altro cerchio *GK* [g] ſegante il lato prolungato *DA* in *L*. Perchè dunque ſono uguali le rette *DG*, *DL* [h], come ancora le rette *DB*, *DA* [i], levando queſte da quelle, cioè *DB* da *DG*, e *DA* da *DL*, rimarranno uguali le reſidue *BG*, *AL* [k]; ma ancora *BC* è uguale a *BG* [l]; dunque le rette *AL*, *BC* ſono uguali [m]; e però dal dato punto *A* ſi è condotta *AL* uguale alla data retta linea *BC*. Il che eraſi propoſto di fare.

d *Dimanda* 1.
e *Propoſiz. prec.*
f *Dimanda* 2.
g *Dimanda* 3.
h *Defin.* 14.
i *Defin.* 19.
k *Aſſiom.* 3.
l *Defin.* 14.
m *Aſſiom.* 1.

PROPOSIZIONE III. PROBL.

FIG. 13.

Date due linee rette diſuguali, dalla maggiore AB *tagliarne una parte* AE *uguale alla minore* C.

Ti-

Tirisi dal punto *A* la retta *AD* uguale alla *C* a, e col centro *A* descrivasi pel punto *D* il cerchio *DF* b, che segherà la *AB* in *E*. Sarà dunque *AE* uguale ad *AD* c, e però ancora alla data *C* d. Il che si doveva fare.

a Propos. 2. prec.
b Dimanda 3.
c Defin. 15.
d Assiom. 11

PROPOSIZIONE IV. TEOREMA.

FIG. 14.

Dato

Se due triangoli ABC, DEF, *avranno un angolo* A *uguale ad un angolo* D, *ed intorno ad essi sieno i lati dell' uno, uguali ai lati dell' altro, cioè* AB *uguale a* DE, *ed* AC, *uguale a* DF; *sarà ancora la base* BC *dell' uno, uguale alla base* EF *dell' altro, e ciascuno degli altri angoli uguale al suo corrispondente*, (a) *cioè l' angolo* B *all' angolo* E, *e l' angolo* C *all' angolo* F; *e tutto il triangolo* ABC *sarà uguale a tutto il triangolo* DEF.

Quesito

Costruzione

S'Intenda applicarsi un triangolo sopra l'altro, di maniera che l'angolo *A* si sopprapponga all' angolo *D*, e il lato *AB* si adatti sopra il lato *DE*. Quindi si vedrà, essere le basi, e tutti gli altri angoli uguali, e ciascheduno de' triangoli uguagliare l' altro suo compagno. Imperocchè l'altro lato *AC* caderà sopra il lato *DF*; altrimenti gli angoli *A*, e *D* non sarebbero uguali, contro l'ipotesi; e il punto *B* caderà in *E*, e il *C* in *F*, essendosi supposti quei lati uguali; sicchè la base *BC* dovrà adattarsi sopra la base *EF*, ed esattamente coprirla; altrimenti le due linee rette comprenderebbero spazio, il che è assurdo e; che però combaciandosi amendue le basi, e ciascheduna'

Determinazione

Dimostrazione

e Assiom. 9.

(a) *Corrispondenti* diconsi quegli angoli, che ne' triangoli sono opposti ai lati uguali.

dun' angolo al suo corrispondente, e tutto il triangolo a tutto il triangolo, saranno uguali le basi, ed uguali gli angoli opposti ai lati uguali, ed ambidue gli spazi de' triangoli parimente saranno uguali [a]. Se dunque due triangoli avranno le condizioni dette nella proposta, cioè un angolo uguale ad un angolo, ed i lati dell' uno uguali a quelli dell' altro intorno al medesimo angolo, saranno pure le loro basi uguali, e gli altri angoli uguali, e le superficie dell' uno, e dell' altro triangolo saranno uguali. Il che dovea dimostrarsi.

a *Assiom.* 5.

Conclusione.

PROPOSIZIONE V.

In ogni triangolo equicrure ABC, *gli angoli interni sopra la base sono tra di loro uguali; e prolungando sotto essa base ambi i lati, gli angoli, che ne risultano esteriormente* (a), *saranno pure tra di loro uguali* (b).

FIG. 15.

PIglisi qualunque punto *F* nel lato *AB* prolungato, e nell' altro lato *AC* si ponga ad *AF* uguale l' *AG* [b]; indi si tirino le rette *CF*, *BG* [c]. Essendo che il triangolo *AFC* ha lo stesso angolo *A*, che l' altro triangolo *AGB*, e sono i lati *AF*, *AG* uguali, come ancora i lati *AC*, *AB*;

Pro pos. 3.
c *Dimanda* 1.

(a) Nel triangolo, e in qualunque altra figura poligona gli *angoli esteriormente risultanti*, *o esterni* son quelli, che sono compresi da due lati della figura istessa, uno de' quali è prolungato, e l' altro nò; come sono nel triangolo ABC gli angoli CBF, BCG, mentre ciascuno di loro è formato dalla BC lato di esso triangolo, e dalla BF, o CG, che sono porzioni aggiunte ai lati di esso triangolo AB, ed AC prolungati fino ai punti F, e G.

(b) Talete Milesio Autore della Setta Ionica dicesi l'Inventore di questa Proposizione.

AB; saranno pure tra loro uguali le basi *FC*, *GB*, e altresì l'angolo *F* uguaglierà l'angolo *G*, e l'altro *ACF* sarà uguale all'altro *ABG* [a]: e perchè dalle linee uguali *AF*, *AG* detratte le uguali *AB*, *AC*, rimane *FB* uguale a *GC* [b], e si è provata ancora *FC* uguale a *GB*, e gli angoli *F*, *G* pure uguali; dunque nei triangoli *FBC*, *GCB* l'angolo *FCB* uguaglierà l'angolo *GBC*, e l'angolo *CBF* sarà uguale all'angolo *BCG* [c]; (*a*) onde dall'angolo *ACF*; e dall'angolo *ABG*, che si sono provati uguali, sottraendo gli angoli uguali *FGB*, *CBG*, rimarranno uguali gli angoli residui *ACB*, *ABC* [d]; dunque nel triangolo equicrure sono uguali gli angoli interni sopra la base, e ancora prolungati i lati al di sotto di essa, gli angoli esteriori *CBF*, *BCG* pure sono uguali, come si è provato. Il che è quanto doveva dimostrarsi (*b*).

a *Prop.* 4.

b *Assiom.* 2.

c *Prop.* 31.

d *Assiom.* 4.

PROPOSIZIONE VI.

FIG. 16.

Viceversa, se in un triangolo ABC *sono uguali due angoli* B, C, *ancora i lati opposti ad essi*, AC, AB *saranno uguali*.

ALtrimenti, se uno dei lati *AB* fosse maggiore dell'altro *AC*, tagliata *BD* uguale ad *AC* [e], indi congiunta *CD* [f], avranno li triangoli *ACB*, *DBC*, intorno gli angoli *C*, *B* uguali, ancora i lati uguali *AC*, *BD*, e il lato *BC* comune, e però uguale in entrambi; dunque sarebbero essi triangoli

e *Propos.* 3.

f *Dimanda* 1.

(*a*) Ed ecco intanto dimostrati gli angoli esterni fra loro uguali, che sono appunto questi due CBF, BCG.

(*b*) Corollario. Quindi ne segue, che i triangoli equilateri sono sempre equiangoli.

a Propos. 4
b Assiom. 6.

goli tra di loro uguali [a]; il che è assurdo, perchè sarebbe il tutto uguale ad una sua parte [b] (a). Non è dunque possibile, che detti lati *AB*, *AC* fossero disuguali, ma erano ambidue uguali; il che ec. (b).

PROPOSIZIONE VII.

FIG. 17. e 18.

Dai termini della medesima retta linea AB *tirate due rette* AD, BD *concorrenti nel punto* D, *non si potranno dai medesimi termini* A, *e* B *condurre altre linee* AC, BC *uguali alle prime, come* AC *alla* AD, *e* BC, *a* BD, *le quali dalla medesima banda concorrano in un punto* C *diverso dall'altro* D.

c Propos. 5.
d Assiom. 6.

Se ciò si supponesse possibile, o sarebbe il loro concorso *C* fuori del triangolo *ADB*, e il punto *D* fuori dell'altro *ACB*; oppure uno di detti concorsi *C* sarebbe dentro l'altro triangolo *ADB*. Nel primo caso, congiunta la *CD*, sarebbe ciascuno dei triangoli *ACD*, *BCD* equicrure, supponendosi *AC* uguale alla *AD*, e la *BC*, uguale a *BD*; dunque l'angolo *ACD* sarà uguale all'angolo *ADC* [c]: ma questo essendo parte dell'angolo *BDC*, sarà di esso minore [d]; dunque ancora *ACD* sarà minore di *BCD*, e l'altro *BCD* molto minore del medesimo *BDC*, a cui do-

(a) Dunque l'AB non era maggiore d'AC. Non può essere neppur minore; poichè supposto ciò, tagliata dalla maggiore AC una porzione uguale all'AB, e condotta come di sopra una retta al punto B, ne nascerebbe il medesimo assurdo: onde l'AB non potendo essere nè maggiore, nè minore d'AC, è manifesto, che le dovrà essere uguale.

(b) COROLLARIO. Quindi è chiaro, che il triangolo equiangolo sarà ancora equilatero.

dovrebbe essere uguale [a]. Dunque non possono le rette uguali alle prime convenire in *C* fuori del triangolo *ADB*. Nemmeno concorreranno nel secondo caso dentro di esso, perchè prolungate le linee *BD*, *BC* in *F*, in *E*, saranno uguali [a] gli angoli esterni *ECD*, *CDF*, per l' uguaglianza dei lati *BC*, *BD*, e nel triangolo *ACD*, per essere *AC* uguale ad *AD*, saranno pure uguali gli angoli interni *ACD*, *ADC*; [a] dunque essendo *ACD* maggiore di *ECD*, sarebbe ancora *ADC* maggiore di *CDF*, cioè la parte maggiore del tutto, il che è assurdo [b]. Dunque non possono le rette *AC*, *BC* uguali alle due *AD*, *BD* condotte dagli stessi termini, concorrere dalla medesima banda in un punto diverso dal medesimo *D*. Il che dovea dimostrarsi. (a)

a Proposizione 5.

b Assiom. 6.

PROPOSIZIONE VIII.

FIG. 19.

Se due triangoli ABC, EDF *avranno i lati* AB, ED *tra di loro uguali, ed ancora i lati* AC, DF *uguali, ed inoltre le basi uguali* BC, EF; *saranno altresì uguali tutti gli altri corrispondenti ai lati opposti uguali nell' uno, e nell' altro triangolo.* (b)

+ angoli

Si

(a) Questa Proposizione serve solo come di Lemma alla proposizione VIII.; mentre non ha altro uso in questi Elementi.

(b) Una tal Proposizione può dirsi la viceversa della Prop. IV. Poichè nell'una, e nell' altra si suppone, che i due triangoli abbiano due lati uguali a due altri lati; ma ivi dall' uguaglianza degli angoli contenuti da lati uguali s' è dedotta l' uguaglianza delle basi; quivi per lo contrario dall' uguaglianza delle basi se ne rileva l' uguaglianza di detti angoli.

SI soprapponga il triangolo *ABC* all' altro *EDF*; adattate insieme le basi uguali *BC*, *EF*, gli altri lati uguali si adatteranno parimente insieme, concorrendo colla cima *A* nel punto *D*, altrimenti due linee uguali alle prime concorrerebbero in un punto diverso da quello, in cui concorrono le altre condotte dai medesimi termini, il che è impossibile [a]. Dunque si adatteranno tutti gli angoli corrispondenti, combaciandosi insieme *A* con *D*, *B* con *E*, *C* con *F*, essendo soprapposti i lati, che gli comprendono; e però saranno i detti angoli uguali [b]. Il che doveasi dimostrare.

a *Propos.* 7.
b *Assiom.* 5.

PROPOSIZIONE IX. PROBL. (a).

Dato l' angolo rettilineo BAC, *dividerlo in due parti uguali.*

PReso nel lato *AB* qualunque punto *D*, si tagli dall' altro lato *AC* la parte *AE* uguale all' *AD* [c], e congiunta *DE* [d], sopra di questa, dalla banda opposta all' angolo dato, si descriva un triangolo equilatero *DFE* [e]; indi si congiunga *AF* [d]; questa dividerà l' angolo dato in due parti uguali; perchè ne' triangoli *ADF*, *AEF*, essendo uguali i lati *AD*, *AE*, il lato *AF* comune, e le basi *FD*, *FE* altresì uguali; sarà pure l' angolo *DAF* uguale all' altro *EAF* [f] (b); dun-

c *Propos.* 3.
d *Dimanda* 1.
e *Propos.* 1.
f *Propos.* 8.

(a) Prescrive ora Euclide il metodo di segare e gli angoli, e le linee nel mezzo, e di alzare, o condurre le perpendicolari.

(b) Tali angoli diconsi *Contigui*, perchè hanno un lato comune, ma gli altri due lati non formano una sola retta linea.

dunque dalla retta *AF* è diviso per mezzo l'angolo dato *BAC*; il che ec.

PROPOSIZIONE X. PROBL.

Data una retta terminata AB, *dividerla in due parti uguali*.

SI faccia sopra di essa il triangolo equilatero *ACB* [a], e dividasi per mezzo l'angolo *C* colla retta *CE* [b]; ne' due triangoli *ACE*, *BCE* essendo il lato *CA* uguale a *CB*, ed il lato *CE* comune, e gli angoli compresi da essi, uguali tra di loro; la base *AE* sarà uguale alla *BE* [c]; e però tutta l'*AB* è divisa ugualmente per mezzo; il che ec.

FIG. 21.
a *Propos.* 1.
b *Propos.* 9.
c *Propos.* 4.

PROPOSIZIONE XI. PROBL.

Alla data retta linea AB, *alzare da un punto* C *dato in essa la perpendicolare* CF.

PReso nella medesima qualunque altro punto *D*, si ponga dall'altra parte *CE* uguale a *CD* [d], e sopra tutta la *DE* si formi il triangolo equilatero [e] *DFE*, e congiunta la retta *FC* [f] sarà questa la perpendicolare ricercata; perchè ne' triangoli *DCF*, *ECF* essendo uguali i lati *DC*, *CE*, il lato *CF* comune, e le basi *DF*, *FE* uguali, sarà l'angolo *DCF* uguale al suo adiacente (*a*) *ECF* [g], e però amendue saranno retti,

FIG. 22.
d *Propos.* 3.
e *Propos.* 1.
f *Dimanda* 1.
g *Propos.* 8.

(*a*) Angoli *Adiacenti* o *Conseguenti* sono quelli, che hanno un lato comune, e gli altri due lati formano una sola linea retta, a differenza degli angoli *Contigui* di sopra descritti.

a Definiz. 10. 11. retti, e la linea FC perpendicolare alla AB [a], alzata sopra di essa dal dato punto C; il che ec.

PROPOSIZIONE XII. PROBL.

Tav. II. FIG. 13. *Da un punto* C *dato fuori della linea* A B *indefinitamente prolungata tirarvi sopra una perpendicolare* CH (a).

SI pigli dall' altra parte di essa linea qualunque punto D, e col centro C, all' intervallo CD descrivasi un arco di cerchio [b], il quale segherà la data retta in due punti G, E; indi segata per mezzo la GE in H [c], e congiunta CH [d], sarà questa la perpendicolare ricercata; perchè essendo GH uguale ad HE, CH comune ai triangoli GHC, EHC, e le basi CG, CE raggi del cerchio uguali [e], sarà l'angolo CHG uguale al conseguente CHE [f], onde l' uno, e l' altro è retto, e la CH è perpendicolare alla retta AB [g], tiratavi dal punto C dato fuori di essa; il che ec.

b Dimanda 3.
c Prop. 10.
d Dimanda 1.
e Defin. 14.
f Prop. 8.
g Defin. 10. e 11.

AVVERTIMENTO.

Essendosi fin quì minutamente citate le precedenti proposizioni, le dimande, gli assiomi, e le definizioni, stimo superfluo il seguitare in avvenire a citarle così minutamente; però supponendole ormai notissime, lascerò, che i principianti le ritrovino da se stessi, e solo si citeranno per qualche volta le nuove proposizioni, acciò si rendano familiari, onde poi sarà superfluo il rinfrescarne la memoria, avendone già

(a) Proclo attribuisce il ritrovamento di essa ad Enopide Chio.

già fatta pratica, e si stimerebbe troppa puerilità il continuare di rammentarle ai Geometri già provetti.

PROPOSIZIONE XIII.

Quando una linea retta EC *è applicata sopra di un' altra* AB, *o farà con essa li due angoli di quà, e di là retti, o almeno la somma di essi sarà uguale a due retti.* FIG. 4.

PErchè se fosse *EC* perpendicolare ad *AB*, certo che ne risulterebbero di quà, e di là gli angoli retti: ma se è inclinata, si tiri dal medesimo punto *C* la perpendicolare *CD* alla data *AB* [a]; dunque gli angoli *ACD*, *BCD* saranno due retti; ma si adattano a questi due retti gli altri due *ACE*, *BCE*, dunque ancora questi due angoli uguaglino la somma di due retti [b]; il che dovea dimostrarsi.

a *Prop.* 11.

b *Assiom.* 5.

PROPOSIZIONE XIV.

Se al medesimo punto B *della retta* AB *congiunte da destra, e da sinistra due rette* DB, CB *comprenderanno con essa due angoli* DBA, CBA *uguali a due retti; saranno esse linee* DB, CB *per diritto fra loro, cioè saranno una sola retta linea* CBD. FIG. 24.

ALtrimenti prolungata la *CB*, se cadesse fuori della retta *BD*, come in *BE*, sarebbero gli angoli pure *EBA*, *CBA* uguali a due retti [c], cioè alli due *DBA*, *CBA*; dunque tolto di comune *CBA*, sarebbero gli angoli *EBA*, *DBA*

c *Propos.* 13.

DBA uguali, cioè il tutto alla parte; il che è impossibile; dunque le rette *CB*, *BD* sono per diritto fra loro, e fanno una retta continua; il che ec.

FIG: 25. *Segandosi fra di loro due rette* AB, CD *nel punto* E, *gli angoli contrapposti alla cima* AEC, BED *saranno uguali*. (a)

PErchè sopra l'*AB* stando la *CE*, farà gli angoli *AEC*, *CEB* uguali a due retti [a]; e così ancora la *BE* sopra la *CD* fa gli angoli *BED*, *CEB* uguali a due retti, e però uguali alli due *AEC*, *CEB*; dunque tolto di comune *CEB*, resta l'angolo *AEC* uguale a *BED*. Similmente si proverà essere l'angolo *CEB* uguale al suo contrapposto *DEA*, facendo pure ciascheduno di questi coll' angolo *BED*, due angoli uguali a due retti; dunque le rette, che si segano, fanno gli angoli alla cima contrapposti uguali; il che ec.

a *Prop.* 13.

COROLLARIO. Da ciò può comprendersi, che tutti gli angoli fatti intorno al punto del segamento da due, o più linee rette, sono uguali a quattro retti.

PROPOSIZIONE XVI.

FIG. . *Di qualunque triangolo* ABC *prolungando un lato* BC *verso* D, *l'angolo esteriore* ACD, *che ne risulta*, *è maggiore di qualunque delli due interni opposti* BAC, ABC.

Di-

(a) Talete dicesi l'Inventore di questa, e dell'altre due che ne seguono.

DIviso il lato AC per mezzo in E, congiunta BE si prolunghi in F, posta EF uguale a BE, indi si congiunga FC. Li triangoli AEB, CEF intorno alla cima E avendo gli angoli uguali [a], e i lati BE, EA dell'uno essendo uguali ai lati FE, EC dell'altro; ancora gli altri angoli corrispondenti BAE, FCE saranno uguali; ma l'angolo ACD è maggiore della sua parte FCE, dunque è maggiore dell'angolo opposto BAE. Similmente prolungando il lato AC in G, diviso BC per mezzo in H, e congiunta AH, se si prolunga in I di maniera, che HI riesca uguale ad AH, congiunta IC, si proverà nei triangoli ABH, CIH essere l'angolo ABH, uguale ad ICH, di cui essendo maggiore l'angolo BCG, il quale uguaglia ACD [a], esso angolo ACD parimente sarà maggiore di ABH; dunque l'angolo esterno ACD è maggiore di qualunque interno opposto BAC, ABC, preso separatamente l'un dall'altro. Il che ec.

a Prop. 15.

PROPOSIZIONE XVII.

Due angoli di qualsivoglia triangolo sono sempre minori di due retti.

DEl triangolo ABC prolungato il lato BC in D, l'angolo interno BAC è minore dell'esterno ACD [b], dunque di comune aggiungendo l'angolo ACB, saranno li due BAC, e ACB, presi insieme, minori delli due ACD, e ACB, la cui somma essendo uguale a due retti [c], dunque la somma delli due interni BAC, ACB è minore di due retti. Similmente si proverà essere ABC,

b Prop. 16.

c Prop. 13.

ABC, e *ACB* insieme presi minori di due retti; dunque sono sempre due angoli d' un triangolo minori di due retti; il che ec.

PROPOSIZIONE XVIII.

FIG. 27.

Se nel triangolo ABC *il lato* AB *è maggiore del lato* AC, *l' angolo* ACB *opposto al primo, sarà maggiore dell' angolo* ABC *opposto al secondo lato*.

SI tagli da *BA* la parte *AD* uguale ad *AC*, e si congiunga *CD*. Sarà l' angolo *ACD* uguale ad *ADC* [a], e questo è maggiore dell' interno *ABC* [b]; dunque l' angolo *ACD*, e molto più il tutto *ACB*, è maggiore dell' angolo *ABC*; il che ec. (*a*).

a *Prop.* 5.
b *Prop.* 16.

PROPOSIZIONE XIX.

Viceversa qualunque volta sia l' angolo ACB *maggiore dell' angolo* ABC *in un medesimo triangolo, sarà il lato* AB *opposto al primo maggiore del lato* AC *opposto al secondo*.

PErchè se i lati suddetti fossero uguali, ancora gli angoli *ACB*, *ABC* sarebbero uguali [a]; se *AC* fosse maggiore di *AB*, sarebbe l' angolo *ABC* maggiore di *ACB* [c]; dunque essendo *ACB* mag-

c *Prop.* 18.

(*a*) Questo Teorema supplisce al caso tralasciato nel Teorema V. Poichè ivi si dimostrò, che se il triangolo era isoscele, vale a dire se aveva due lati uguali, gli angoli ad essi opposti sarebbero stati uguali. Quì poi si prova, che se uno di questi lati sia maggiore dell'altro, maggiore sarà eziandio quell' angolo, che al lato maggiore è opposto.

maggiore di *ABC*, bisogna, che sia il lato *AB* maggiore di *AC*; il che ec. (a).

PROPOSIZIONE XX.

In ogni triangolo ADC *sono due lati qualunque* AD, *e* DC *presi insieme, maggiori del terzo* AC (b).

SI prolunghi *AD*, e pongasi in esso *DB* uguale a *DC*. Congiunta *BC*, sarà l'angolo *DCB* uguale all'angolo *B* [a]: ma *ACB* è maggiore di *DCB*; dunque *ACB* è maggiore dell'angolo *B*; e però nel triangolo *ABC* il lato *AB* sarà maggiore di *AC* [b]; ma *AB* è uguale alli due lati *AD*, *DC*; dunque sono questi maggiori del terzo *AC*; il che ec.

a *Prop.* 5.

b *Prop.* 19.

PROPOSIZIONE XXI.

FIG. 28.

Se dagli estremi della base BC *si conducano le rette* BD, CD *concorrenti nel punto* D *dentro il triangolo* ABC, *saranno le due rette* BD, CD *minori delle due* BA, CA, *ma quelle conterranno l'angolo* BDC *maggiore dell'angolo* BAC *contenuto da queste*.

C Si

(a) Questa Proposizione pure supplisce al caso, di cui è mancante la Prop. VI mentre in quella si provò, che agli angoli uguali d'un triangolo, sono sottesi lati uguali; in questa poi si dimostra, che in un triangolo al maggior angolo è sempre opposto il maggior lato.

(b) Questa Proposizione è da Archimede considerata, come un Assioma. Poichè egli definisce la linea retta; quella, che è la più breve fra tutte quelle, che possono condursi da un punto ad un altro. Onde siccome l'AC è retta, e AD insieme con DC non costituiscono una sola retta linea, ma contengono un angolo; sarà perciò l'AC minore di quelle due AD, DC prese insieme.

Si prolunghi *BD* fino che concorrà col lato *AC* in *E*: saranno le due *BA*, *AE*, maggiori di *BE* [a]; dunque aggiunta di comune *EC*, sono *BA*, e *AC* maggiori di *BE*, *EC*; e perchè *DE* con *EC* sono maggiori di *CD* [a], e aggiunta *DB*, sono *BE*, ed *EC* maggiori di *BD*, e *CD*; dunque le due *BA*, *AC* maggiori sono delle due *BD*, *CD*; ma l'angolo *BDC* è maggiore di *CED* [b], ed è *CED* maggiore di *BAC* [b]; dunque *BDC* è maggiore di *BAC*; il che dovevasi dimostrare.

a Prop. 20.
b Prop. 16.

PROPOSIZIONE XXII. PROBL.

FIG. 29.

Date tre linee rette A, B, C, *due delle quali sieno maggiori della terza, formarne un triangolo* FKG.

Nella retta *DH* si distinguano le parti *FG*, *GH*, *FD* respettivamente uguali alle date *C*, *B*, *A*, e fatto centro in *F*, coll'intervallo *FD* descrivasi il cerchio *DK*; e fatto centro in *G*, coll'intervallo *GH* si descriva l'altro cerchio *HK*; e dove questi cerchi concorrono in *K*, si congiungano ai centri le rette *KF*, *KG*; sarà nel triangolo *FKG* il lato *FG* uguale a *C*; il lato *GK* uguale a *GH*, cioè a *B*, ed il lato *FK* uguale ad *FD*, cioè ad *A*; dunque si è fatto il triangolo colle date tre linee; il che ec. (a).

PRO-

(a) Il presente Problema è più generale, e più esteso del Problema primo; poichè in esso doveasi formare un triangolo equilatero; e in questo trattasi di costruire qualunque triangolo, ciascuno de' di cui lati abbia una data lunghezza. E' necessario però, che le tre date rette, alle quali esser debbono uguali i lati del triangolo da costruirsi, sieno tali, che due di esse prese insieme, e comunque si voglia, sieno maggio-

PROPOSIZIONE XXIII. PROBL.

Nella data retta linea AB, *al punto* A *dato in essa, costituire un angolo uguale al dato* FDE (a). FIG. 30.

TIrata sotto l'angolo dato qualunque retta *FE*, si faccia un triangolo con tre linee uguali alle date *FE*, *FD*, *DE* [a], in maniera che le due *AB*, *AC* uguaglino le due *ED*, *DF*, e la *BC* sia uguale alla *FE*; è manifesto, che l'angolo *BAC* sarà uguale all'angolo dato *FDE* [b]. Dunque sarà fatto ciò, che era proposto.

a *Prop.* 22.

b *Prop.* 8.

PROPOSIZIONE XXIV.

Se due triangoli ABC, DEF *avranno due lati* AB, AC *uguali alli due* DE, DF, *l'uno all'altro respettivamente, ma l'angolo* BAC *sia maggiore di* EDF, *la base* BC *sarà altresì maggiore della base* EF.

NElla linea *AB* costituiscasi al punto *A* l'angolo *BAG* uguale ad *EDF* [c] e fatta la *AG* uguale alla *DF*, si congiunga *BG*, la quale sarà ad *EF* uguale [d], e se il punto *G* cade dentro la retta *BC*, è chiaro, che sarà *BG* minore di *BC*, essendo una sua parte; se cade sopra, essendo le due *AG*, *BG* minori delle due *AC*, *BC* [e], ed essendo uguale *AG* ad *AC*, perchè ciascuna di esse uguaglia *DF*, dovrà essere *BG* minore di *BC*;

c *Prop.* 23.

d *Prop.* 4.

e *Prop.* 21.

giori della terza; poichè una delle proprietà essenziali del triangolo è, che due lati di esso presi insieme son sempre maggiori del terzo, come dimostrossi nella Prop. XX.

(a) Proclo è d'opinione, che questa sia stata ritrovata da Enopide Chio.

BC, se poi il punto *G* riesce al di sotto, congiunta *CG* sarà il triangolo *ACG* equicrure, onde l'angolo *ACG* sarà uguale ad *AGC* [a]: ma l'angolo *BGC* è maggiore di *AGC*, e conseguentemente di *ACG*, e molto più di *BCG*; dunque *BC* è maggiore di *BG* [b]. Però sempre essendo *BC* di *BG* maggiore, sarà pure maggiore di *EF*; il che ec. (*a*).

a Prop. 5.
b Prop. 19.

PROPOSIZIONE XXV.

Se il triangolo ABC *ha li due lati* AB, AC *uguali a quelli* ED, DF *del triangolo* DEF, *ma la base* BC *sia maggiore della base* EF, *l'angolo* BAC *sarà pure maggiore dell'angolo* EDF.

PErchè se ancora li due angoli *BAC*, *EDF* fossero uguali, sarebbero le basi *BC*, *EF* uguali [c]; e se fosse *BAC* minore di *EDF*, sarebbe *BC* minore di *EF* contro l'ipotesi [d]. Dunque *BAC* è maggiore di *EDF*. (*b*)

c Prop. 4.
d Prop. 24

PROPOSIZIONE XXVI.

FIG. 31.

Nei due triangoli ABC, DGE, *se due angoli* B, C *dell'uno sono uguali agli angoli* DGE, GED *dell'altro, ed un lato intercetto fra i detti angoli* BC *sia uguale al lato* GE *interposto fra gli altri due angoli del secondo, uguali a quelli del pri-*

mo

(*a*) Il dimostrato Teorema supplisce al caso tralasciato nella Prop. IV. Poichè ivi si provò, che dati due triangoli aventi due uguali lati, erano le basi loro uguali, qualora gli angoli da essi lati compresi, fossero stati uguali; quì si dimostra, che se uno di questi angoli sia maggiore dell'altro, la base eziandio d'uno di quei triangoli sarà maggiore della base dell'altro.

(*b*) La presente Prop. è la viceversa della precedente.

ino; oppure un lato AB *opposto ad uno di essi angoli* C, *uguagli il lato* DG *opposto all' angolo* E *uguale ad esso* C; *saranno gli altri lati dell' uno uguali a quelli dell' altro; e l' angolo rimanente al rimanente, e tutto il triangolo primo a tutto il secondo sarà uguale*. (a)

IMperocchè quando *BC* uguaglia *GE*, se non fosse ancora *CA* uguale ad *ED*, sia uno di essi, per esempio *ED*, maggiore dell' altro *CA*, e tagliandone *EH* uguale ad *AC*, congiunta *GH*, riuscirebbe l' angolo *EGH* uguale all' angolo *B* [a]: ma questo supponevasi uguale a *DGE*; dunque la parte *EGH* sarebbe uguale al tutto *DGE*; il che è impossibile; erano dunque uguali ancora i lati *CA*, e *ED*, e conseguentemente ancora *BA* era uguale a *GD*, e l' angolo *A* all' angolo *GDE*, e tutto il triangolo a tutto il triangolo [a]. Se poi solamente si supponesse il lato *AB* uguale a *DG*, sarebbe ancora *BC* uguale a *GE*; altrimenti se fosse uno di essi, per esempio *GE*, maggiore di *BC*, posta *GI* uguale a *BC*, sarebbe l' angolo *GID* uguale a *BCA* [a]: ma *GID* è maggiore di *GED* [b]; dunque *BCA* non sarebbe eguale a *GED*, contro l' ipotesi; bisogna dunque, che ancora i lati *BC*, *GE* sieno uguali, e però ancora *AC* a *DE*, e l'angolo *A* all' angolo *GDE*, e tutto il triangolo a tutto il triangolo. Il che ec.

a *Prop.* 4.

b *Prop.* 16.

PROPOSIZIONE XXVII.

Se due rette linee AB, CD *sono segate da un' altra* EF, *in maniera che gli angoli alterni* AFE, DFE

FIG. 32.

(a) Talete dicesi di questa l' Inventore, come attesta io Stanlejo Ist. Fil. p. 1. c. 7.

DFE *di quà e di là riescano uguali, esse linee* AB, CD *saranno parallele* (*a*).

PErchè, se prolungate convenissero in un punto *G*, dovrebbe l'angolo esterno *AEF* essere maggiore dell'interno *DFE* a; ma gli è uguale; dunque non convengono esse rette *AB*, *CD* in veruna parte; e però sono parallele b. Il che ec.

a Prop. 16.
b Def. 28.

PROPOSIZIONE XXVIII.

FIG. 33.

Parimente saranno parallele le rette AB, CD, *se l'angolo esterno* AGE *sarà uguale all'interno opposto dalla medesima parte* CHG: *ovvero se li due interni dalla stessa banda* AGH, CHG *sieno uguali a due retti*.

IMperocchè in tal caso sarebbe l'angolo *HGB*, il quale uguaglia *AGE* c, uguale a *CHG* alterno: siccome essendo *HGB* con *AGH* uguale a due retti d, se sono *AGH*, *CHG* pure a due retti uguali, bisognerà, sia *HGB* uguale al detto *CHG* alterno; dunque le rette *AB*, *CD* in qualunque di questi due casi debbono essere parallele e. Il che ec.

c Prop. 15.
d Prop. 13.
e Prop. 27.

AVVERTIMENTO.

Servendosi Euclide nella seguente Proposizione del suo Assioma, da noi posto nel numero VIII. *in cui dicesi, che* se due linee rette sieno segate da una terza

(*a*) Qualora sopra due rette linee parallele cadavi un' altra retta, che le seghi, quegli angoli, che colle loro punte riguardano parti opposte, chiamansi *alterni*.

terza in maniera, che da una parte ne risultino due angoli interni minori di due retti, e dall' altra banda maggiori, prolungate in infinito quelle due rette dalla banda, ove sono gli angoli minori, dovranno insieme concorrere; *ed avendo ivi indicato, di doverne in questo luogo dimostrare la verità, ed evidenza di questo Assioma, ne addurrò quì una pruova addotta dal P. Clavio, esposta però più brevemente, che sia possibile.*

I. *Si osservi primieramente, che se sopra la retta* BH *eretta una perpendicolare* BP; *la retta* PX *con essa* BP *farà un angolo acuto* BPX, *le altre perpendicolari* RQ, TS *erette sopra la medesima* BH, *ed alla stessa* PX *terminate, vanno decrescendo; poichè condotta la* BQ *perpendicolare sopra la* PX (*che caderà dalla banda dell' angolo acuto, dovendo li due angoli* BPQ, BQP *essere minori di due retti*[a], *e non un retto, ed un' ottuso nel triangolo* QBP) *indi sopra la* BH *condotta la perpendicolare* QR, *e la* RS *perpendicolare alla* PX, *e la* ST *perpendicolare alla* BH *ec. è manifesto, che sarà* BP *maggiore di* BQ, *e questa* BQ *maggiora di* QR, *e la* QR *maggiore di* RS, *e la* RS *maggiore di* ST *ec.*[b] *essendo opposte all' angolo retto, che è il maggiore angolo in qualunque di tali triangoletti.*

FIG. 34.

a Prop. 17.

b Prop. 19.

II. *Similmente facendo la retta* PX *sopra la* ST *perpendicolare a* BH, *l' angolo ottuso* TSP, *le altre perpendicolari* QR, PB *ec. condotte sopra la stessa* BH, *dalla banda di questo angolo ottuso, si fanno sempre maggiori, essendo* SR *maggiore di* ST, *e* RQ *maggiore di* RS, *e* QB *maggiore di* RQ, *e* BP *maggiore di* QB, *come nel §. antecedente.*

III.

III. *Quindi ne segue, che essendo sopra la retta* BT *alzate due perpendicolari* TS, BZ *tra di loro uguali, connessa la retta* SZ, *farà gli angoli* SZB, ZST *ambidue retti: perchè se uno di essi fosse acuto, oppure ottuso, le dette perpendicolari* ZB, ST *non sarebbero uguali, ma decrescerebbero, o si farebbero maggiori l' una dell' altra, come ne' §§. precedenti si è dimostrato.*

IV. *Ciò supposto, se la retta* AP *sega li due* PD, AL *in maniera, che gli angoli* APD, PAL *riescano minori di due angoli retti, dico, che prolungate le rette* PD, AL *dovranno verso quella parte concorrere. Imperocchè verso l' angolo acuto* APD *tirata la perpendicolare* AB *dal punto* A *sopra la* PD *si prenda nell'* AL *qualunque punto* E, *e sopra l'* AB *si tiri la perpendicolare* EF; *indi presa* EK *uguale ad* AE, *e prodotta* EM *uguale ad* EF, *congiunta* KM *sarà ancor essa uguale ad* AF, *e l' angolo* EMK *uguale al retto* AFE, *giacchè li due lati* EK, EM *sono uguali alli due* AE, EF *intorno gli angoli uguali alla cima* E; *però presa* FG *uguale ad* AF *sarà uguale ad* MK; *e congiunta* GK *farà pure angoli retti con l'* AG, *come si cava da ciò, che si è dimostrato al* num. III. *mentre le rette* MK, FG *sono uguali, e perpendicolari alla retta* FM.

V. *Quindi se all'* AK *si prenderà uguale la* KL, *ed all'* AG *sia uguale* GH, *prolungata* GK *in* N *in maniera, che uguagli la* GK, *congiunta* LN *si proverà similmente uguale ad* AG, *e l' angolo* N *retto come* AGK, *congiunta* LH *sarà pure perpendicolare, all'* AH: *e ponendosi* LC *uguale ad* AL, *ed* HI *uguale ad* AH, *congiunte* CI *sarà pure alla medesima* AI *perpendicolare.*

VI. *E perchè presa* FG *uguale ad* AF, *e* GH *uguale ad* AG, *ed* HI *uguale ad* AH, *e così proseguendo, verrà una volta l'* AI *maggiore dell'* AB, *e così la retta* BD *rimarrà inclusa dentro il triangolo* AIC; *dunque prolungata la* BD *dovrà uscire fuori dello spazio finito di questo triangolo; e non potendo concorrere con la base* IC, *perchè essendo li due angoli* DBI, CIB *uguali a due retti, le rette* BD, IC *sono parallele* a; *dunque converrà la* BD *col lato* AC *in* V; *e però le rette* PBD, AL *segate dall'* AP, *o dall'* AB *con due angoli minori di due retti, prolungate verso quella banda, necessariamente insieme converranno in* V. *Il che dovea dimostrarsi.*

a *Prop.* 28.

PROPOSIZIONE XXIX.

Segandosi due linee parallele AB, CD *da una retta* EF, *saranno li due angoli interni da qualunque parte, come* AGH, CHG *uguali a due retti; e l'esteriore* BGE *uguale all' interno opposto dalla medesima parte* GHD, *e gli alterni* DHG, AGH *tra di loro uguali.*

FIG. 33.

PErchè, se gl' interni *AGH*, *CHG* non fossero uguali a due retti, o sarebbero essi, o li susseguenti *BGH*, *DHG*, minori di due retti; onde non sarebbero le rette *AB*, *CD* parallele, ma converrebbero insieme b. Dunque debbono essere li due angoli interni da qualsivoglia parte uguali a due retti; ed a due retti essendo pure uguali tanto li due *EGB*, *BGH*, quanto li due *AGH*, *BGH* c, sarà qualunque di queste coppie uguali alli due interni *DHG*, e *BGH*; e però tolto di

b *Assiom.* 8. *sopra dimostrato*

c *Prop.* 13.

di comune esso *BGH*, rimarrà *DHG* uguale sì all' esterno *BGE* [a], come all' alterno *AGH*, [b]; il che ec.

a *Assom.* 2.
b *Prop.* 15.

PROPOSIZIONE XXX.

FIG. 35.

Se le rette AB, CD *saranno parallele ad una terza* EF, *saranno pure tra di loro parallele.*

PErchè segandosi tutte e tre da una retta *GK* ne' punti *G*, *H*, *K*, l' angolo *AGK* sarà uguale all' alterno *GHF* [c], e questo uguale all'interno opposto *DKH*, dunque li due *AGK*, *DKH*, che sono alterni tra le due rette *AB*, *CD*, saranno uguali; e però queste rette saranno parallele tra di loro [d], essendo ciascuna parallela alla medesima terza *EF*; il che dovea dimostrarsi.

c *Prop.* 29.
d *Prop.* 27.

PROPOSIZIONE XXXI. PROBL.

FIG. 33.

Per un dato punto H *tirare una linea* CD *parallela ad un' altra linea data* AB.

SI tiri da esso punto sopra la data linea *AB* qualunque retta *HG*; indi all' angolo *AGH* si faccia uguale l' angolo *GHD* [e], sarà la retta *DHC* parallela alla data *AB* [d]; il che doveva eseguirsi.

e *Prop.* 23.

PROPOSIZIONE XXXII.

FIG. 36.

In qualunque triangolo ABC, *prolungando fuori un lato* BC *verso* D, *sarà l' angolo esterno* ACD *uguale alli due interni opposti* CAB, CBA *presi insieme: e tutti tre gli angoli di esso*

trian-

triangolo CAB, CBA, BCA *interni sono uguali a due retti* (*a*).

SI tiri dal punto *C* la retta *CE* parallela ad *AB* [a], sarà l'angolo *ACE* uguale all'alterno *CAB*, e l'esterno *ECD* uguaglierà l'interno opposto *ABC* [b]; dunque l'angolo *ACD* è uguale a tutti due gl'interni opposti *CAB*, *CBA*; e tanto a quello, che a questi due aggiunto l'angolo rimanente interno *BCA*, sono li tre angoli interni *CAB*, *CBA*, *BCA* uguali alli due *ACD*, *BCA*, li quali uguagliano due retti [c]. Però li tre angoli interni di qualunque triangolo uguagliano due retti, il che ec. (*b*).

a *Prop.* 31.
b *Prop.* 29.
c *Prop.* 13.

PRO-

(*a*) Pittagora dicesi essere stato di questa l' Inventore.

(*b*) Quindi se ne inferiscono sette Corollarj.

I. Che se in un triangolo vi sarà un angolo retto, o un ottuso, gli altri angoli saranno acuti.

II. Se vi sarà un retto, gli altri due saranno uguali ad un retto.

III. Se in un triangolo Isoscele vi sarà un retto, gli altri due saranno semiretti.

IV. Se un triangolo sarà equilatero, ciaschedun'angolo sarà uguale a 60. gradi.

V. Se due angoli d'un triangolo sono uguali a due angoli d'un altro, ancora il terzo angolo di quello sarà uguale al terzo di questo.

VI. In qualunque figura rettilinea tutti gli angoli interni sono uguali a tal numero di retti, qual'è il doppio numero de' lati, toltine quattro; poichè preso dentro la data figura qualunque punto, indi condotte a ciascun'angolo di essa le sue rette, ne risultano tanti triangoli, quanti sono i lati della figura istessa; onde gli angoli di essi triangoli sono uguali a tante paia di retti, quanti sono essi lati della figura: ma agli angoli di questa sono congruenti quelli dei triangoli, eccettuati però gli angoli, che sono intorno al loro vertice, quali uguagliano quattro retti pel Corollario della Prop. XV.; dunque il numero degli angoli retti attenenti ad essa figura è doppio del numero de' suoi lati, detrattine quattro. Così se la figura sarà

PROPOSIZIONE XXXIII.

FIG. 37. *Le rette* AC, BD, *che congiungono dalle stesse parti li termini delle rette* AB, CD *parallele, ed uguali, riescono ancor esse uguali, e parallele.*

SI connettano colla retta *CB* agli angoli opposti, saranno intorno agli angoli *ABC*, *BCD* uguali [a], essendo alterni di due parallele, il lato *AB* uguale al lato *CD*, ed il lato *CB* comune; dunque le basi *AC*, *BD* sono uguali [b], e gli altri angoli corrispondenti *BCA*; *CBD* pure saranno uguali; e però essendo alterni, le stesse rette *AC*, *BD* sono parallele [c]: Dunque ec.

a Prop. 29.
b Propos. 4.
c Prop. 27.

PRO-

rà quadrilatera, preso un punto dentro di essa, e da questo condotte agli angoli tante rette, quanti sono gli angoli istessi del quadrilatero, ne risulteranno quattro triangoli: gli angoli di questi uguagliano per la Prop. otto retti; sicchè togliendosi da una tal somma i quattro angoli retti, che sono intorno al vertice dei triangoli, vi rimangono quattro retti attenenti alla figura quadrilatera; e perciò in qualunque figura rettilinea gli angoli interni sono uguali a tal numero di retti, qual' è il doppio numero de' lati, levatine quattro.

VII. Gli angoli poi esterni, che risultano prolungato qualunque lato in qualsivogl a figura, saranno sempre uguali a quattro retti, perchè questi con gli angoli interni fanno tante paia di retti, quanti sono i lati: ma gli angoli interni uguagliano tante paja di retti, quanti sono essi lati, detrattine quattro; dunque a questo numero di quattro retti corrispondono gli angoli esterni; dal che rilevasi eziandio, che gli angoli esterni d' una figura uguagliano quelli di qualunque altra, che sia composta d' un maggiore, o minor numero di lati.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Nei quadrilateri, li cui lati opposti sono paralleli e però chiamansi PARALLELOGRAMMI, *come* ABDC, *gli opposti lati sono sempre uguali, e gli angoli opposti uguali, e da un angolo all' altro opposto tirata la* BC; *che dicesi suo* DIAMETRO, *rimane detto spazio diviso in due triangoli uguali* ABC, DCB.

IMperocchè tali triangoli hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato comune *BC*, essendo gli alterni *ABC*, *BCD* uguali, e gli alterni *BCA*, *CBD* pure uguali [a]; onde le basi *AC*, *BD* saranno uguali, ed ancora gli angoli opposti *A*, *D* uguali saranno, e gli altri due *ABD*, *ACD*, e tutto il triangolo *ABC* all' altro *DCB* [b]; e però il parallelogrammo dal diametro *BC* è diviso per mezzo; il che ec.

a Prop. 29.

b Prop. 26.

PROPOSIZIONE XXXV.

FIG. 38.

Li parallelogrammi ABCD, BCFE, *sopra la stessa base* BC, *fra le medesime parallele* BC, AF *descritti, sono tra di loro uguali.*

IMperocchè il lato *AD*, ed il lato *EF* essendo uguali al medesimo opposto *BC* [c]; sono uguali tra loro, ed aggiunta la comune *DE*, sarà *AE* uguale a *DF*; ed *AB* uguaglia *DC* [c], e l' angolo *BAE* è uguale a *CDF* [a]; dunque il triangolo *ABE* è uguale all' altro *CDF* [d]; e tolto il comune *DGE*, saranno uguali i trapezii *ADGB*, *CGEF*; indi aggiunto all' uno, ed all' altro il triangolo

c Prop. 34.

d Propos. 4.

BGC,

BC, se poi il punto *G* riesce al di sotto, congiunta *CG* sarà il triangolo *ACG* equicrure, onde l'angolo *ACG* sarà uguale ad *AGC* [a]: ma l'angolo *BGC* è maggiore di *AGC*, e conseguentemente di *ACG*, e molto più di *BCG*; dunque *BC* è maggiore di *BG* [b]. Però sempre essendo *BC* di *BG* maggiore, sarà pure maggiore di *EF*; il che ec. (a).

a Prop. 5.
b Prop. 19.

PROPOSIZIONE XXV.

Se il triangolo ABC *ha li due lati* AB, AC *uguali a quelli* ED, DF *del triangolo* DEF, *ma la base* BC *sia maggiore della base* EF, *l'angolo* BAC *sarà pure maggiore dell'angolo* EDF.

PErchè se ancora li due angoli *BAC*, *EDF* fossero uguali, sarebbero le basi *BC*, *EF* uguali [c]; e se fosse *BAC* minore di *EDF*, sarebbe *BC* minore di *EF* contro l'ipotesi [d]. Dunque *BAC* è maggiore di *EDF*. (b)

c Prop. 4.
d Prop. 24

PROPOSIZIONE XXVI.

FIG. 31.

Nei due triangoli ABC, DGE, *se due angoli* B, C *dell'uno sono uguali agli angoli* DGE, GED *dell'altro, ed un lato intercetto fra i detti angoli* BC *sia uguale al lato* GE *interposto fra gli altri due angoli del secondo, uguali a quelli del primo*

(a) Il dimostrato Teorema supplisce al caso tralasciato nella Prop. IV. Poichè ivi si provò, che dati due triangoli aventi due uguali lati, erano le basi loro uguali, qualora gli angoli da essi lati compresi, fossero stati uguali; quì si dimostra, che se uno di questi angoli sia maggiore dell'altro, la base eziandio d'uno di quei triangoli sarà maggiore della base dell'altro.

(b) La presente Prop. è la viceversa della precedente.

ino: oppure un lato AB *opposto ad uno di essi angoli* C, *uguagli il lato* DG *opposto all' angolo* E *uguale ad esso C; saranno gli altri lati dell' uno uguali a quelli dell' altro; e l' angolo rimanente al rimanente, e tutto il triangolo primo a tutto il secondo sarà uguale.* (a)

IMperocchè quando *BC* uguaglia *GE*, se non fosse ancora *CA* uguale ad *ED*, sia uno di essi, per esempio *ED*, maggiore dell' altro *CA*, e tagliandone *EH* uguale ad *AC*, congiunta *GH*, riuscirebbe l' angolo *EGH* uguale all' angolo *B* [a]: ma questo supponevasi uguale a *DGE*; dunque la parte *EGH* sarebbe uguale al tutto *DGE*; il che è impossibile; erano dunque uguali ancora i lati *CA*, e *ED*, e conseguentemente ancora *BA* era uguale a *GD*, e l' angolo *A* all' angolo *GDE*, e tutto il triangolo a tutto il triangolo [a]. Se poi solamente si supponesse il lato *AB* uguale a *DG*, sarebbe ancora *BC* uguale a *GE*; altrimenti se fosse uno di essi, per esempio *GE*, maggiore di *BC*, posta *GI* uguale a *BC*, sarebbe l' angolo *GID* uguale a *BCA* [a]: ma *GID* è maggiore di *GED* [b]; dunque *BCA* non sarebbe eguale a *GED*, contro l' ipotesi; bisogna dunque, che ancora i lati *BC*, *GE* sieno uguali, e però ancora *AC* a *DE*, e l' angolo *A* all' angolo *GDE*, e tutto il triangolo a tutto il triangolo. Il che ec.

a *Prop.* 4.

b *Prop.* 16.

PROPOSIZIONE XXVII.

Se due rette linee AB, CD *sono segate da un' altra* EF, *in maniera che gli angoli alterni* AFE, DFE

FIG. 32.

(a) Talete dicesi di questa l' Inventore, come attesta lo Stanlejo Ist. Fil. p. 1. c. 7.

DFE *di quà e di là riescano uguali, esse linee* AB, CD *saranno parallele* (a).

Perchè, se prolungate convenissero in un punto *G*, dovrebbe l' angolo esterno *AEF* essere maggiore dell' interno *DFE* a; ma gli è uguale; dunque non convengono esse rette *AB*, *CD* in veruna parte; e però sono parallele b. Il che ec.

a Prop. 16.
b Def. 18.

PROPOSIZIONE XXVIII.

FIG. 33.

Parimente saranno parallele le rette AB, CD, *se l' angolo esterno* AGE *sarà uguale all' interno opposto dalla medesima parte* CHG: *ovvero se li due interni dalla stessa banda* AGH, CHG *sieno uguali a due retti*.

Imperocchè in tal caso sarebbe l'angolo *HGB*, il quale uguaglia *AGE* c, uguale a *CHG* alterno: siccome essendo *HGB* con *AGH* uguale a due retti d, se sono *AGH*, *CHG* pure a due retti uguali, bisognerà, sia *HGB* uguale al detto *CHG* alterno; dunque le rette *AB*, *CD* in qualunque di questi due casi debbono essere parallele e. Il che ec.

c Prop. 15.
d Prop. 13.
e Prop. 27.

AVVERTIMENTO.

Servendosi Euclide nella seguente Proposizione del suo Assioma, da noi posto nel numero VIII. *in cui dicesi, che* se due linee rette sieno segate da una terza

(a) Qualora sopra due rette linee parallele cadavi un' altra retta, che le seghi, quegli angoli, che colle loro punte riguardano parti opposte, chiamansi *alterni*.

terza in maniera, che da una parte ne risulti-no due angoli interni minori di due retti, e dall' altra banda maggiori, prolungate in infinito quelle due rette dalla banda, ove sono gli angoli minori, dovranno insieme concorrere; *ed avendo ivi indicato, di doverne in questo luogo dimostrare la verità, ed evidenza di questo Assioma, ne addurrò quì una pruova addotta dal P. Clavio; esposta però più brevemente, che sia possibile:*

I. *Si osservi primieramente, che se sopra la retta* BH *eretta una perpendicolare* BP; *la retta* PX *con essa* BP *farà un angolo acuto* BPX, *le altre perpendicolari* RQ, TS *erette sopra la medesima* BH, *ed alla stessa* PX *terminate, vanno decrescendo; poichè condotta la* BQ *perpendicolare sopra la* PX (*che caderà dalla banda dell' angolo acuto, dovendo li due angoli* BPQ, BQP *essere minori di due retti* [a], *e non un retto, ed un' ottuso nel triangolo* QBP) *indi sopra la* BH *condotta la perpendicolare* QR, *e la* RS *perpendicolare alla* PX, *e la* ST *perpendicolare alla* BH *ec. è manifesto, che sarà* BP *maggiore di* BQ, *e questa* BQ *maggiore di* QR, *e la* QR *maggiore di* RS, *e la* RS *maggiore di* ST *ec.* [b] *essendo opposte all' angolo retto, che è il maggiore angolo in qualunque di tali triangoletti.*

FIG. 34.

a Prop. 17.

b Prop. 19.

II. *Similmente facendo la retta* PX *sopra la* ST *perpendicolare a* BH, *l' angolo ottuso* TSP, *le altre perpendicolari* QR, PB *ec. condotte sopra la stessa* BH, *dalla banda di questo angolo ottuso, si fanno sempre maggiori, essendo* SR *maggiore di* ST, *e* RQ *maggiore di* RS, *e* QB *maggiore di* RQ, *e* BP *maggiore di* QB, *come nel* §. *antecedente.*

III.

III. *Quindi ne segue, che essendo sopra la retta* BT *alzate due perpendicolari* TS, BZ *tra di loro uguali, connessa la retta* SZ, *farà gli angoli* SZB, ZST *ambidue retti: perchè se uno di essi fosse acuto, oppure ottuso, le dette perpendicolari* ZB, ST *non sarebbero uguali, ma decrescerebbero, o si farebbero maggiori l' una dell' altra, come ne' §§. precedenti si è dimostrato.*

IV. *Ciò supposto, se la retta* AP *sega li due* PD, AL *in maniera, che gli angoli* APD, PAL *riescano minori di due angoli retti, dico, che prolungate le rette* PD, AL *dovranno verso quella parte concorrere. Imperocchè verso l' angolo acuto* APD *tirata la perpendicolare* AB *dal punto* A *sopra la* PD *si prenda nell'* AL *qualunque punto* E, *e sopra l'* AB *si tiri la perpendicolare* EF; *indi presa* EK *uguale ad* AE, *e prodotta* EM *uguale ad* EF, *congiunta* KM *sarà ancor essa uguale ad* AF, *e l' angolo* EMK *uguale al retto* AFE, *giacchè li due lati* EK, EM *sono uguali alli due* AE, EF *intorno gli angoli uguali alla cima* E; *però presa* FG *uguale ad* AF *sarà uguale ad* MK; *e congiunta* GK *farà pure angoli retti con l'* AG, *come si cava da ciò, che si è dimostrato al* num. III. *mentre le rette* MK, FG *sono uguali, e perpendicolari alla retta* FM.

V. *Quindi se all'* AK *si prenderà uguale la* KL, *ed all'* AG *sia uguale* GH, *prolungata* GK *in* N *in maniera, che uguagli la* GK, *congiunta* LN *si proverà similmente uguale ad* AG, *e l' angolo* N *retto come* AGK, *congiunta* LH *sarà pure perpendicolare all'* AH: *e ponendosi* LC *uguale ad* AL, *ed* HI *uguale ad* AH, *congiunta* CI *sarà pure alla medesima* AI *perpendicolare.*

VI. *E perchè presa* FG *uguale ad* AF, *e* GH *uguale ad* AG, *ed* HI *uguale ad* AH, *e così proseguendo, verrà una volta l'* AI *maggiore dell'* AB, *e così la retta* BD *rimarrà inclusa dentro il triangolo* AIC; *dunque prolungata la* BD *dovrà uscire fuori dello spazio finito di questo triangolo; e non potendo concorrere con la base* IC, *perchè essendo li due angoli* DBI, CIB *uguali a due retti, le rette* BD, IC *sono parallele* a; *dunque converrà la* BD *col lato* AC *in* V; *e però le rette* PBD, AL *segate dall'* AP, *o dall'* AB *con due angoli minori di due retti, prolungate verso quella banda, necessariamente insieme converranno in* V: *Il che dovea dimostrarsi.*

a *Prop.* 28.

PROPOSIZIONE XXIX.

FIG. 33.

Segandosi due linee parallele AB, CD *da una retta* EF, *saranno li due angoli interni da qualunque parte, come* AGH, CHG *uguali a due retti; e l'esteriore* BGE *uguale all'interno opposto dalla medesima parte* GHD, *e gli alterni* DHG, AGH *tra di loro uguali.*

PErchè, se gl'interni *AGH*, *CHG* non fossero uguali a due retti, o sarebbero essi, o li susseguenti *BGH*, *DHG*, minori di due retti; onde non sarebbero le rette *AB*, *CD* parallele, ma converrebbero insieme b. Dunque debbono essere li due angoli interni da qualsivoglia parte uguali a due retti; ed a due retti essendo pure uguali tanto li due *EGB*, *BGH*, quanto li due *AGH*, *BGH* c, sarà qualunque di queste coppie uguali alli due interni *DHG*, e *BGH*; e però tolto di

b *Assiom.* 8. *sopra dimostrato*

c *Prop.* 13.

di comune esso *BGH*, rimarrà *DHG* uguale sì all' esterno *BGE* [a], come all' alterno *AGH*, [b]; il che ec.

a *Assiom.* 1.
b *Prop.* 15.

PROPOSIZIONE XXX.

FIG. 35.

Se le rette AB, CD *saranno parallele ad una terza* EF; *saranno pure tra di loro parallele.*

PErchè segandosi tutte e tre da una retta *GK* ne' punti *G*, *H*, *K*, l' angolo *AGK* sarà uguale all' alterno *GHF* [c], e questo uguale all'interno opposto *DKH*, dunque li due *AGK*, *DKH*, che sono alterni tra le due rette *AB*, *CD*, saranno uguali; e però queste rette saranno parallele tra di loro [d], essendo ciascuna parallela alla medesima terza *EF*; il che dovea dimostrarsi.

c *Prop.* 29.
d *Prop.* 27.

PROPOSIZIONE XXXI. PROBL.

FIG. 33.

Per un dato punto H *tirare una linea* CD *parallela ad un' altra linea data* AB.

SI tiri da esso punto sopra la data linea *AB* qualunque retta *HG*; indi all' angolo *AGH* si faccia uguale l' angolo *GHD* [e], sarà la retta *DHC* parallela alla data *AB* [d]; il che doveva eseguirsi.

e *Prop.* 23.

PROPOSIZIONE XXXII.

FIG. 36.

In qualunque triangolo ABC, *prolungando fuori un lato* BC *verso* D, *sarà l' angolo esterno* ACD *uguale alli due interni opposti* CAB, CBA *presi insieme: e tutti tre gli angoli di esso trian-*

triangolo CAB, CBA, BCA *interni sono uguali a due retti* (a).

SI tiri dal punto *C* la retta *CE* parallela ad *AB* [a], sarà l'angolo *ACE* uguale all'alterno *CAB*, e l'esterno *ECD* uguaglierà l'interno opposto *ABC* [b]; dunque l'angolo *ACD* è uguale a tutti due gl'interni opposti *CAB*; *CBA*; e tanto a quello, che a questi due aggiunto l'angolo rimanente interno *BCA*, sono li tre angoli interni *CAB*; *CBA*; *BCA* uguali alli due *ACD*, *BCA*, li quali uguagliano due retti [c]. Però li tre angoli interni di qualunque triangolo uguagliano due retti, il che ec. (b).

a *Prop.* 31.
b *Prop.* 29.
c *Prop.* 13.

(a) Pittagora dicesi essere stato di questa l'Inventore.

(b) Quindi se ne inferiscono sette Corollarj.

I. Che se in un triangolo vi sarà un angolo retto, o un ottuso, gli altri angoli saranno acuti.

II. Se vi sarà un retto, gli altri due saranno uguali ad un retto.

III. Se in un triangolo Isoscele vi sarà un retto, gli altri due saranno semiretti.

IV. Se un triangolo sarà equilatero, ciaschedun'angolo sarà uguale a 60. gradi.

V. Se due angoli d'un triangolo sono uguali a due angoli d'un altro, ancora il terzo angolo di quello sarà uguale al terzo di questo.

VI. In qualunque figura rettilinea tutti gli angoli interni sono uguali a tal numero di retti, qual'è il doppio numero de' lati, toltine quattro; poichè preso dentro la data figura qualunque punto, indi condotte a ciascun'angolo di essa le sue rette, ne risultano tanti triangoli, quanti sono i lati della figura istessa; onde gli angoli di essi triangoli sono uguali a tante paia di retti, quanti sono essi lati della figura: ma agli angoli di questa sono congruenti quelli dei triangoli, eccettuati però gli angoli, che sono intorno al loro vertice, quali uguagliano quattro retti pel Corollario della Prop. XV.; dunque il numero degli angoli retti attenenti ad essa figura è doppio del numero de' suoi lati, detrattine quattro. Così se la figura sarà

PROPOSIZIONE XXXIII.

FIG. 37.

Le rette AC, BD, *che congiungono dalle stesse parti li termini delle rette* AB, CD *parallele, ed uguali, riescono ancor esse uguali, e parallele.*

SI connettano colla retta *CB* agli angoli opposti, saranno intorno agli angoli *ABC*, *BCD* uguali [a], essendo alterni di due parallele, il lato *AB* uguale al lato *CD*, ed il lato *CB* comune; dunque le basi *AC*, *BD* sono uguali [b], e gli altri angoli corrispondenti *BCA*; *CBD* pure saranno uguali; e però essendo alterni, le stesse rette *AC*, *BD* sono parallele [c]. Dunque ec.

a Prop. 29.
b Prop. 4.
c Prop. 27.

PRO-

rà quadrilatera, preso un punto dentro di essa, e da questo condotte agli angoli tante rette, quanti sono gli angoli istessi del quadrilatero, ne risulteranno quattro triangoli: gli angoli di questi uguagliano per la Prop. otto retti; sicchè togliendosi da una tal somma i quattro angoli retti, che sono intorno al vertice dei triangoli, vi rimangono quattro retti attenenti alla figura quadrilatera; e perciò in qualunque figura rettilinea gli angoli interni sono uguali a tal numero di retti, qual' è il doppio numero de' lati, levatine quattro.

VII. Gli angoli poi esterni, che risultano prolungato qualunque lato in qualsivogl a figura, saranno sempre uguali a quattro retti, perchè questi con gli angoli interni fanno tante paia di retti, quanti sono i lati: ma gli angoli interni uguagliano tante paja di retti, quanti sono essi lati, detrattine quattro; dunque a questo numero di quattro retti corrispondono gli angoli esterni; dal che rilevasi eziandio, che gli angoli esterni d' una figura uguagliano quelli di qualunque altra, che sia composta d' un maggiore, o minor numero di lati.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Nei quadrilateri, li cui lati opposti sono paralleli e però chiamansi PARALLELOGRAMMI, *come* ABDC, *gli opposti lati sono sempre uguali, e gli angoli opposti uguali, e da un angolo all' altro opposto tirata la* BC; *che dicesi suo* DIAMETRO, *rimane detto spazio diviso in due triangoli uguali* ABC, DCB.

IMperocchè tali triangoli hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato comune *BC*, essendo gli alterni *ABC*, *BCD* uguali, e gli alterni *BCA*, *CBD* pure uguali [a]; onde le basi *AC*, *BD* saranno uguali, ed ancora gli angoli opposti *A*, *D* uguali saranno, e gli altri due *ABD*, *ACD*, e tutto il triangolo *ABC* all'altro *DCB* [b]; e però il parallelogrammo dal diametro *BC* è diviso per mezzo; il che ec.

a Prop. 29.

b Prop. 26.

PROPOSIZIONE XXXV.

Li parallelogrammi ABCD, BCFE, *sopra la stessa base* BC, *fra le medesime parallele* BC, AF *descritti, sono tra di loro uguali.*

FIG. 38.

IMperocchè il lato *AD*, ed il lato *EF* essendo uguali al medesimo opposto *BC* [c]; sono uguali tra loro, ed aggiunta la comune *DE*, sarà *AE* uguale a *DF*; ed *AB* uguaglia *DC* [c], e l' angolo *BAE* è uguale a *CDF* [c]; dunque il triangolo *ABE* è uguale all'altro *CDF* [d]; e tolto il comune *DGE*, saranno uguali i trapezii *ADGB*, *CGEF*; indi aggiunto all' uno, ed all' altro il triangolo

c Prop. 34.

d Propos. 4.

BGC,

BGC, sarà il parallelogrammo *ABCD* uguale all' altro *BCFE*; il che dovea dimostrarsi:

PROPOSIZIONE XXXVI.

FIG. 39.

Se poi li parallelogrammi ABCD, EFGH, *tra le stesse parallele* AH, FG *disposti, saranno sopra uguali basi* BC, FG, *saranno pure tra di loro uguali*.

PErchè tirate le rette *BE*, *CH*, riusciranno ancora esse parallele [a], essendo le parallele *BC*, *EH* uguali, giacchè tanto questa, che quella è uguale ad *FG*; dunque *BCHE* è un parallelogrammo uguale ad *ABCD*; per esser sù la stessa base *BC*, ed uguale pure ad *EFGH* [b], con cui ha la medesima base *EH*, fra le stesse parallele *AH*, *BG*; però li detti parallelogrammi *ABCD*, *EFGH* sono tra di loro uguali; il che ec.

a Prop. 33.
b Prop. 35.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Li triangoli BDC, BEC *costituiti sù la medesima base* BC, *e tra le stesse parallele* BC, AE, *sono pure tra di loro uguali*.

IMperocchè tirata la *BA* parallela a *CD*, e la *CH* parallela a *BE*, ne risultano due parallelogrammi *ABCD*, *EBCH*, li quali sono sù la stessa base, e fra le medesime parallele, e però sono tra di loro uguali [b]; dunque li triangoli *BDG*, *BEG*, che sono la metà di essi parallelogrammi [c], sono pure tra di loro uguali [d]; il che ec.

c Prop. 34.
d Assiom. 4.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Li triangoli BCD, FHG *sopra uguali basi* BC, FG *disposti fra le stesse parallele* BG, DH *sono pure tra di loro uguali*.

Condotte le rette *BA* parallela a *CD*, ed *FE* parallela a *GH*, riescono due parallelogrammi *ABCD*, *EFGH* sopra basi uguali costituiti, e fra le medesime parallele, che però sono fra di lora uguali [a]; dunque ancora detti triangoli, che sono le loro metà [b], sono pure tra di loro uguali [c]; il che ec.

a *Prop.* 36.
b *Prop.* 34.
c *Assiom.* 4.

PROPOSIZIONE XXXIX.

FIG. 40.

Se due triangoli BAC, BDC, *costituiti sopra la stessa base* BC, *verso la medesima parte, sono uguali tra loro, la retta* AD, *che le loro cime congiunge, riesce parallela alla base* BC.

Altrimenti, se non gli fusse parallela, si tiri *AE* parallela a *BC*, la quale seghi il lato *BD* sopra, o sotto la cima *D*, nel punto *E*. Congiunta la retta *CE*, riuscirebbe il triangolo *BEC* uguale a *BAC* [d], e però uguale all'altro triangolo *BDC*, onde la parte sarebbe uguale al tutto; il che è impossibile [e]; dunque l'*AD* era parallela alla base *BC*, come dovea dimostrarsi.

d *Prop.* 37.
e *Assiom.* 6.

PROPOSIZIONE XL.

FIG. 41.

Similmente se sopra due porzioni uguali BC, EF *della medesima linea* BF, *sieno costituiti verso la*

me-

medesima parte due triangoli uguali BAC, EDF, *la retta* AD, *che commette le loro cime, sarà parallela a* BF.

SE tale non fosse, tirata l' *AH* parallela a *BF* segherebbe il lato *ED* in *H*, sopra o sotto la cima *D*; e congiunta la *FH*, sarebbe il triangolo *EHF* uguale ad *ABC* [a], e però uguale ad *EDF*, il che è assurdo [b]; adunque non altra linea, che l' *AD* condotta dal punto *A* può essere parallela a *BF*; il che ec.

a *Prop.* 38.
b *Assiom.* 6.

PROPOSIZIONE XLI.

FIG. 39.

Se il parallelogrammo ABCD *ha la stessa base* BC *col triangolo* BEC, *disposto fra le stesse parallele* BC, AE, *sarà il parallelogrammo duplo di detto triangolo.*

IMperocchè tirata la retta *BD*, saranno li triangoli *BDC*, *BEC* uguali [c]; dunque essendo *ABCD* duplo di *BDC* [d], sarà pure duplo di *BEC*; il che ec.

c *Propos.* 37.
d *Propos.* 34.

PROPOSIZIONE XLII. PROBL.

FIG. 42.

Ad un dato triangolo ABC *fare un parallelogrammo uguale* FECG *con un angolo uguale ad un dato* D.

DAl punto *A* condotta la retta *AG* parallela alla base *BC* [e], e questa per mezzo divisa in *E* [f], si faccia l'angolo *CEF* uguale al dato *D* [g], e condotta *CG* parallela ad *EF*, sarà il parallelogrammo *FECG* al dato triangolo *ABC* uguale;

e *Prop.* 31.
f *Prop.* 10.
g *Prop.* 23.

per-

perchè tirata la retta *AE*, essendo uguali le basi *BE*, *EC*, sono uguali li triangoli *BAE*, *EAC* a, e però sarà *ABC* duplo del triangolo *AEC*, di cui essendo ancora duplo il parallelogrammo *FECG* b, sarà dunque al triangolo *ABC* uguale il detto parallelogrammo, con l'angolo *CEF* uguale al dato *D*, come era da farsi.

a Propos. 38.

b Prop. 41.

PROPOSIZIONE XLIII.

In ogni parallelogrammo ABCE, *condotto il diametro* AC, *e per qualunque punto* G *di esso condotte le rette* IGF, HGK *parallele a' lati* AB, BC, *saranno li parallelogrammi* BIGK, HGFE (*che si chiamano* COMPLEMENTI) *tra di loro uguali*.

FIG. 43.

IMperocchè essendo tutto il triangolo *ABC* uguale ad *AEC*, ed il triangolo *AKG* uguale ad *AFG*, ed il triangolo *GIC* uguale a *GHC* c, sarà il rimanente spazio *BIGK* uguale al rimanente *HGFE*; il che ec.

c Prop. 34.

PROPOSIZIONE XLIV. PROBL.

Ad una data retta GF, *nell'angolo dato* D, *applicare un parallelogrammo* HGFE *uguale ad un dato triangolo* L.

SI faccia un parallelogrammo *IGKB* uguale al detto triangolo *L* nell'angolo *IGK* uguale al dato *D* d, e posta la data *GF* per diritto al lato *IG*, si compisca il parallelogrammo *KGFA*, e si tiri il diametro *AG*, che prolungato concorrerà col lato *BI* in *C* e, e condotta *CE* parallela ad *AB*, si prolunghino ad essa le rette

d Prop. 42.

e Assiom. 8.

KG, *AF* in *H*, *E*; sarà il parallelogrammo *HGFE* un complemento uguale all'altro *IGKB* a, e però uguale al dato triangolo *L*, ed applicato alla data retta *GF*, con l' angolo *HGF* uguale ad *IGK*, e però uguale al dato angolo *D*; il che dovea farsi.

a Prop. 43.

PROPOSIZIONE XLV. PROBL.

FIG. 44.

Alla data retta FG *applicare un parallelogrammo* GFKL, *uguale ad un dato rettilineo* ABCD, *con un angolo uguale al dato* E.

SI risolva il rettilineo in triangoli *ABD*, *BCD*, (ed in più altri, se avesse più lati). Indi nel dato angolo *E* facciasi, applicato alla retta *FG* il parallelogrammo *FGHI*, uguale al triangolo *ABD* b, e prolungata la retta *GH*, si formi nell' angolo *IHL*, applicato alla retta *HI*, il parallelogrammo *LHIK* uguale all'altro triangolo *BCD* (e così si prosiegua, se vi sono altri triangoli annessi); è manifesto, che tutto il parallelogrammo *GFKL* applicato alla retta *GF*, nell' angolo *FGH* uguale ad *E*, sarà uguale a tutto il dato rettilineo, essendo la prima sua parte uguale al primo triangolo, e la seconda al secondo ec. Il che ec.

b Propos. 44.

PROPOSIZIONE XLVI. PROBL.

FIG. 47.

Sopra una data retta linea AB *descrivere il suo quadrato* ABCD.

SI alzi dal punto *A* sopra la data *AB* la perpendicolare *AD* c uguale alla medesima *AB*, e si

c Prop. 11.

si tirino DC parallela ad AB, e BC parallela l' AD. Saranno i lati opposti uguali, ed ancora gli angoli opposti uguali, essendo questo pure un parallelogrammo [a]; dunque essendo uguali AB, ed AD, saranno pure tutti i lati uguali, e tutti gli angoli retti, perchè le parallele avendo gli angoli interni uguali a due retti [b], siccome è retto l'angolo BAD, così pure è retto ABC, e così CDA; però $ABCD$ è un quadrato [c], che dovea farsi sopra la data AB (a).

a Prop. 34.

b Prop. 28.

c Defin. 23.

PROPOSIZIONE XLVII.

In qualunque triangolo rettangolo ABC, *il quadrato* BDEC *descritto sopra il lato* BC *opposto all'angolo retto* (b), *uguaglia li due quadrati* ABFG, ACIH *descritti sopra gli altri due lati* AB, AC *contenenti l'angolo retto* A.

FIG. 45.

SI tiri la retta ALM parallela a' lati BD, CE, e condotte le rette FC, AD, congiunto l'angolo ABC all'uno, e all'altro de' retti uguali FBA, DBC, sarà l'angolo FBC uguale all'angolo ABD, ed il lato FB essendo uguale al lato AB, ed il lato CB uguale a BD, saranno li triangoli FBC,

 ABD

(a) Corollario I. Dalla dimostrazione d'un tal problema deducesi, che se in un parallelogrammo uno degli angoli sia retto, gli altri pure saranno retti.

Corollario II. Dalla definizione del quadrato, o sivvero dalla costruzione di questo problema è chiaro, che due, o più quadrati descritti sopra linee uguali, debbono essere sempre tra loro uguali; e viceversa.

(b) Il lato del triangolo, che è sotteso all'angolo retto, dicesi da' Greci *Hypothenusa*: onde questo teorema suole enunciarsi anche in tal guisa: *Ne' triangoli rettangoli il quadrato delli ipotenusa è uguale a' quadrati degli altri due lati presi insieme.*

ABD uguali; ma eſſendo *CA* per diritto con la *GA*, mercè li due angoli retti *BAC*, *BAG* il triangolo *FBC* ha la ſteſſa baſe col quadrato *ABFG*, ed è tra le medeſime parallele; onde *ABFG* è il duplo del triangolo *FBC* [a], e ſimilmente il parallelogrammo *BLMD* è duplo del triangolo *ABD*; dunque il quadrato *ABFG* è uguale a *BLMD*. Parimente condotte le rette *IB*, *AE*, ſi proveranno uguali i triangoli *ICB*, *ACE*, di cui il doppio ſarà uguale, cioè il quadrato *ACIH* uguaglierà *LMEC*; e però li due quadrati de' lati *AB*, *AC* ſaranno uguali al quadrato del lato *BC* oppoſto all'angolo retto; il che era da dimoſtrarſi (a).

[a] Prop. 41.

PRO-

(a) Aggiunto all' angolo retto BCE, e all'altro parimente retto ACI l'angolo ACB, ne riſulterà l'angolo ACE uguale ad ICB nei triangoli ACE ICB: il lato AC del primo triangolo ſarà uguale ad IC del ſecondo, e GE uguale a CB; onde queſti due triangoli ſaranno uguali: ma il triangolo ACE è la metà del parallelogrammo LMEC; ed il triangolo ICB è la metà del quadrato ACIH: dunque eſſo parallelogrammo LMEC uguaglierà il quadrato ACIH; e però eſſendo anche il parallelogrammo BLMD uguale al quadrato ABFG, è manifeſto, che tutti e due i parallelogrammi uguaglieranno tutti e due quadrati preſi inſieme. Ma i due parallelogrammi formano l'intiero quadrato dell' ipotenuſa BDEC; dunque queſto ſarà uguale a due quadrati ABFG, ACIH.

Queſto Teorema (cui Euclide nella Propoſizione 31. del Libro ſeſto eſtende a tutte le figure ſimili) ſuole comunemente appellarſi *Pittagorico* dal ſuo ritrovatore Pittagora, il quale, per atteſtato di Broclo, di Vitruvio, e d'altri, è fama, che ſacrificaſſe alle Muſe l'Ecatombe, ſebbene Cicerone è d'avviſo, che un ſolo toro ſacrificaſſe, e queſto, al dire di Porfirio, di paſta, e ſecondo il Nazianzeno, d'Argilla; mentre eſſo Pittagora non avea voluto anteriormente ſacrificare ad Apollo Delio un toro, per non aſpergere l'altare, ed imbrattarlo col ſangue di quello.

Aſſai frequente è l'uſo di queſto famoſo teorema in tutta la Mattematica, ed apre

la

PROPOSIZIONE XLVIII.

Viceversa, se il quadrato del lato BC *uguaglia li due quadrati degli altri lati* AB, AC *del triangolo* BAC, *sarà l'angolo* CAB *opposto al lato* BG *necessariamente un angolo retto.* FIG. 46.

IMperocchè dal punto *A* tirata la perpendicolare *AD* sopra il lato *AC*, e tagliando essa *AD* ugua-

la strada a conoscere le quantità incommensurabili, che sono il grande arcano della Geometrica Filosofia.

Che un lato del quadrato sia incommensurabile col di lui diametro, è dagli antichi Filosofi, e specialmente da Aristotele, e da Platone considerato fra tutti i Teoremi il più celebre; talchè chiunque ignorava questo Teorema, era da Platone medesimo riputato non già uomo, ma bruto. La notizia d'un tal mistero sembra avere avuta la sua origine da questa quarantesima settima Proposizione. Poichè essendovi in ciascun quadrato gli angoli retti, il quadrato del diametro dovrà essere uguale ai quadrati di due lati, e perciò doppio di uno di essi quadrati: onde il quadrato del diametro essendo 2., e il quadrato d'uno dei lati 1; ne viene per conseguenza, che il diametro sarà la radice quadrata del numero 2, ed il lato la radice quadrata dell'unità, oppure l'unità medesima, la proporzione delle quali grandezze, vale a dire sì de' due quadrati, come delle due radici quadrate, non può esprimersi in numeri, come a suo luogo dimostrerassi, e però sono elleno incommensurabili.

E da questo solo argomento, quandanche ne mancassero altri, si viene a conchiudere evidentemente che le linee non possono essere composte d'un determinato numero di punti; altrimenti non ve ne sarebbe alcuna incommensurabile, poichè a comune misura di tutte sarebbe il punto.

Da tutto il fin qui dimostrato sembra potersene dedurre, che se il triangolo rettangolo ABC abbia intorno l'angolo retto B, i lati uguali; il quadrato dell'Ipotenusa sarà doppio del quadrato d'uno de' lati AB, o AC adiacenti all'angolo retto.

Sicchè non potendo essere il triangolo rettangolo, se non se equicrure, o scaleno

uguale alla AB, congiunta poscia CD, sarà il quadrato di essa CD uguale alli due quadrati di AC, e di AD [a], cioè di AC, e di AB; essendo fatta AD uguale ad AB; dunque il quadrato CD è uguale al quadrato BC, ed il lato CD uguale al lato BC ne' triangoli ADC, ABC; in cui il lato pure AD uguaglia il lato AB, ed il lato AC è comune ad entrambi; dunque l' angolo retto CAD, è uguale all' angolo CAB [b]; e però questo è retto, onde esso triangolo CAB è rettangolo, come dovea dimostrarsi.

a Prop. 47.

b Prop. 8.

ELE-

leno; per provare geometricamente questa Proposizione, il triangolo rettangolo debba essere scaleno, o equicrure. Per poi dimostrarla arimmeticamente, fà d'uopo che il triangolo rettangolo sia unicamente scaleno. Laonde supponendosi il lato BC, detto ipotenusa, uguale a 5. palmi, e degli altri due lati contenenti l'angolo retto, uno, cioè AB essendo 4, e l'altro, cioè AC 3 palmi; egli è manifesto, che il quadrato dell' ipotenusa sarà uguale a 25. palmi.

Ma il quadrato del 4. è 16.; ed il quadrato del 3 è 9.; dunque è chiaro; che questi due quadrati insieme uniti, e facienti la somma di palmi 25., uguagliano il quadrato istesso dell' ipotenusa.

ELEMENTI DELLA GEOMETRIA DI EUCLIDE

LIBRO II. (a)

DEFINIZIONI.

I. OGni parallelogrammo rettangolo dicesi contenuto da que' due lati, che sono d'intorno all' angolo retto (b). *Così quando si nominerà il* RETTANGOLO ABC, *o di* AB *in* BC (*o sieno quelle due linee distinte, o congiunte insieme, o l'una parte dell' altra*) *dovrà intendersi il parallelogrammo* ABCD *fatto da tali lati* AB, *e* BC *congiunti insieme ad angolo retto, a' quali lati sono pure*

Tav. III. FIG. 47.

(a) Trattasi in questo secondo Libro delle potenze delle linee rette, cioè de' quadrati delle linee rette divise, o indivise, e dei parallelogrammi rettangoli prodotti dalle parti delle linee rette divise comunque, confrontandosi questi con i parallelogrammi rettangoli formati dall' intera linea, e con i quadrati. Il parallelogrammo rettangolo spesso si chiama *Rettangolo* senz'altro, a differenza del triangolo, e di qualunque figura poligona. E intanto è piaciuto a' Geometri d'intendere, e di esprimere colla voce *rettangolo* il solo parallelogrammo d'angoli retti, in quanto che nel triangolo un solo angolo può essere retto; e negli altri poligoni pure può esser retto un angolo, senza che l'altro lo sia; ma nel parallelogrammo rettangolo è necessario, che retti sieno tutti e quattro gli angoli

goli; e ciò avviene, quando sia retto l'angolo contenuto da quelle due linee, dalle quali si concepisce determinato, e generato l'istesso parallelogrammo rettangolo. Che se il divisato angolo non sia retto, o non sarà parallelogrammo, o essendo tale, non potrà avere alcun' angolo retto, com' è agevol cosa a dimostrarsi.

A primo aspetto sembra il secondo libro ai principianti molto sublime, e difficile a intendersi, perchè essi s'immaginano contenersi in questo qualche cosa di misterioso, e d' arcano. Ma se rifletteranno, che la maggior parte delle dimostrazioni, che quivi si fanno sono fondate sù quell' assioma VI; che il tutto è uguale alle sue parti prese insieme; e se esamineranno bene le figure, esercitandovi sopra una benchè leggiera attenzione; svanirà del tutto quella difficoltà, che vi ravvisano, e si maraviglieranno di non avere intese dimostrazioni così chiare, ed evidenti.

Le prime otto Proposizioni son quelle, che hanno per suo fondamento il mentovato Assioma; possono dimostrarsi e arimmeticamente, cioè per via di numeri, e algebraicamente, vale a dire per lettere, siccome ancora nelle tre divisate maniere sono dimostrabili, e la nona, e la decima Proposizione di questo libro, sebbene non abbiano queste due per fondamento l' Assioma di sopra enunciato.

E primieramente per dimostrare qualunque di esse dieci proposizioni arimmeticamente, fa di mestieri il premettere, che dovendosi formare un rettangolo, è necessario moltiplicare le parti delle due linee, dalle quali si concepisce generato, e delle quali una si considera come lunghezza, e l' altra come larghezza di esso rettangolo. Sicchè data la linea, o lunghezza BC. (Fig. 47 Tav. III.) quale sia divisa in tre parti uguali, e la linea, o larghezza AB, quale costi di quattro uguali parti; il prodotto numerico di quelle in queste sarà uguale a dodici piccoli quadrati, i quali compongono l' intero rettangolo. Poco divario vi è nella formazione d' un quadrato. Poichè bisogna anche qui moltiplicare le parti della lunghezza per quelle della larghezza: le quali due estensioni dovendo essere uguali: potrà moltiplicarsi in se medesima una di loro, e ne risulterà il di lei quadrato: così dovendosi esprimere il quadrato della retta AB, (Fig. 50.) la quale sia quattro parti, esso quadrato equivarrà a sedici; perchè moltiplicato il quattro in se stesso, dà il 16. per prodotto. Ed ecco la convenienza, o l' analogia; che può avere il prodotto numerico rispet-

to al rettangolo, o al quadrato.

In secondo luogo per dimostrare analiticamente o algebraicamente qualsivoglia delle divisate prime dieci Proposizioni, fa d'uopo essere a portata de' segni proprj del sommare, e del moltiplicare, la spiegazione de' quali premettesi al libro V. degli Elementi; onde mi risparmio di darne di essi contezza. Solo sembrami opportuno il soggiungere, che dovendosi primieramente sommare A con B, bisogna unire insieme queste due lettere col seguente segno d'unione +, scrivendo A+B, lo che vale A più B, oppure A sommata con B. In secondo luogo per moltiplicare una grandezza per un'altra, come per cagion d'esempio A per B, ovvero A per A, si scrive in tal guisa: A×B, oppure A×A, e vale il medesimo, che dire: A moltiplicata per B, ovvero A moltiplicata per A. Il prodotto poi, che da tali moltiplicazioni risultane, viene indicato da quelle due medesime lettere insieme congiunte senza segno veruno intermedio, scrivendo A B, oppure A A, il qual quadrato, e qualunque altro si trascrive anche così: A^2, (il che denota essere A moltiplicata due volte in sè medesima;) e allora s'intenderà formato il rettangolo, o il quadrato di quelle grandezze.

In terzo luogo fa di mestieri nelle operazioni algebraiche da eseguirsi moltiplicare ciascuna delle grandezze anteriori al segno della moltiplicazione per tutte quelle, che sono ad un tal segno posteriori, affinchè la moltiplicazione sia intiera, e perfetta.

In ultimo è da avvertirsi, che siccome ognuna delle dieci soprammentovate Proposizioni contiene in sè due parti, e perciò due operazioni richiede; allora sarà giustamente dimostrata la proposizione, quando le operazioni algebraiche dell'una, e dell'altra parte confronteranno insieme, vale a dire avranno la serie delle loro grandezze uguale nell'una, e nell'altra di esse parti, come noterò nell'esempio analitico della prima Proposizione di questo Libro: e ciò non è altro, che una riprova della esattezza della operazione, e della dimostrazione, e conseguentemente della verità della proposizione.

re uguagli gli opposti CD, *e* DA *paralleli a' due primi. Ed intanto dicesi esso rettangolo contenuto da essi lati, perchè se in parti uguali l' uno, e l' altro s' intenda diviso, per esempio* AB *in* 4 *parti*, BC *in* 3; *il prodotto del numero della parti di* AB *nel numero delle parti* BC *compone il numero de' quadratelli, i quali compiscono la superficie di tale rettangolo: come* 4 *multiplicato in* 3 *farà dodici quadratini di ciascuna particella de' lati, li quali riempiono il rettangolo* ABCD.

II.

(*b*) Ciò niente altro significa, se non che un rettangolo viene determinato, generato, misurato da due linee contenenti l' angolo retto I. Diceſi *determinato*; poichè eſſendo il rettangolo una superficie piana, è dotato ſoltanto di lunghezza, e larghezza, due linee, delle quali una determini la di lui lunghezza, e l' altra la larghezza, determineranno eziandio lo ſteſſo rettangolo. II. *Generato*, perchè ſe ſi concepiſce la lunghezza ſcorrere verſo la linea oppoſta parallela per modo, che mantenendoſi ella con la ſua eſtremità ſopra la larghezza, reſti ſempre perpendicolare alla larghezza medeſima; nel procedere, che eſſa fà, col ſuo veſtigio deſcrive, e genera il parallelogrammo rettangolo; ſicchè quando il punto eſtremo della lunghezza giungerà all' altro eſtremo punto della larghezza, ſarà già formato, e generato il rettangolo. Lo ſteſſo avviene, qualora ſtando immobile la lunghezza ſcorra ſopra di lei l' altra linea denotante la larghezza. III. Diceſi *miſurato* il rettangolo da due linee, mà impropriamente; poichè I. miſura dee eſſere omogenea al miſurato. Per miſurare una lunghezza ſerve una miſura, che ſia anch' eſſa lunghezza: ma per miſurare una ſuperficie dotata eziandio di larghezza una miſura che ſia ſola lunghezza, non baſta. Dunque biſognerà alle linee aggiugnere qualche larghezza, con prendere una ſuperficie piccola quanto ſi voglia formata da una piccola porzione della lunghezza, e da un'altra porzione della larghezza, ma che ſia commenſurabile collo ſteſſo rettangolo, vale a dire che preſa alcune volte uguagli tutto intiero il rettangolo, ſenza che punto ne avanzi: e allora potrà dirſi eſſo rettangolo *miſurato* dalle due linee contenenti l' angolo retto.

II. In ogni rettangolo *ABCD* preso uno de' rettangoli intorno al diametro, come *AEFH*, con li due complementi *FB*, *FD*, ciò è lo spazio *ABIFGD*, si chiamerà GNOMONE. FIG. 48.

PROPOSIZIONE I.

Se di due rette AB, *e* C, *l'una sia segata in più parti* AE, EF, FB; *il rettangolo compreso da essa* C, *e dall' intiera* AB, *è uguale alla somma de' rettangoli contenuti da essa* C, *e da ciascheduna di tali parti.* FIG. 49.

IMperocchè alla stessa *AB* posta ad angolo retto la *BD* uguale alla *C*, e compiuto il rettangolo *ABDG*, si tirino da' punti *EF*, che dividono essa *AB*, le rette *EH*, *FI* parallele a *BD*; è manifesto, che *ABDG* uguaglia li rettangoli in esso compresi *FBDI*, *EFIH*, *AEHG*: ma quello è contenuto dall' *AB*, e dalla *BD* uguale a *C*; e questi altri si contengono dalle parti *FB*, *FE*, *AE*, e dalle rette *FI*, *EH* uguali a *BD*, e però uguali alla stessa *C*; dunque il rettangolo contenuto dall' intiera *AB*, e dalla *C*, uguaglia la somma de' rettangoli fatti dalla stessa *C*, e da ciascuna delle parti *AE*, *EF*, *FB* dell' intiera *AB*; il che era da dimostrarsi (a). PRO-

(a) *Esempio Numerico*.

Sia AE = 2, EF = 3, FB = 1: dunque AE + EF + FB saranno uguali a 6. palmi. Inoltre sia la linea intiera ed indivisa C = 5: sarà il rettangolo della linea divisa AB nella non divisa C, di palmi 30.

PROPOSIZIONE II.

FIG. 50. *Segandosi la retta* AB *in due parti* AD, BD; *il quadrato di tutta* ABGF *uguaglia i rettangoli di essa* AB *in ciascheduna parte* AD, BD.

PErchè tirata *DH* parallela al lato *AF*, resta esso quadrato diviso appunto in due rettangoli, l'uno *FADH* contenuto dall' *AF* (che ugua-

---

Oltre à ciò il rettangolo di 2 in 5 sarà di palmi - - - - - - - - 10.
Il rettangolo di 3 in 5, = 15.
Quello di 1 in 5 - - - = 5. De' quali facendo la somma, avremo
palmi - - - - - - - - 30.

Esempio Analitico.

Si esprima la linea AE con la sola lettera A, EF con la B, FB con la D.
$A + B + D \times G = AG + BG + DG$;
Parimente $A \times G = AG$,
$B \times G = BG$.
$D \times G = DG$. Dunque le grandezze risultanti dalla prima operazione algebraica, e conseguenti al segno della uguaglianza; combinando, e confrontando esattamente con le grandezze nascenti dalla seconda triplice operazione; l'una e l'altra di loro sarà bene eseguita, la dimostrazione giusta e legittima; la proposizione vera: lo che succederà anche nell'altre Proposizioni.

uguaglia *AB*) e dalla parte *AD*; l'altro *DBGH*, contenuto dalla *BG*(pure uguale ad *AB*) e dall' altra parte *DB*; sicchè essendo il tutto uguale alla somma delle sue parti; il quadrato *AB* uguaglia i rettangoli di *AB* in *AD*, e di essa *AB* in *BD*, il che ec. (a).

PROPOSIZIONE III.

Essendo pure segata l' AB *nel punto* D; *il rettangolo di tutta l'* AB *nella parte* AD *uguaglia il quadrato di essa* AD *col rettangolo contenuto da ambe le parti* AD, *e* BD. FIG. 51.

Si

(a) *Esempio Numerico.*

Sia AD = 8, DB = 2: sarà AB = 10., e il di lei quadrato costerà di palmi 100.

Ma il rettangolo di 10. in 8. è di palmi 80.
e quello di 10 in 2 è 20.

Dunque ambedue insieme i rettangoli formano palmi 100.; quale appunto è il quadrato di 10.

Esempio Analitico.

S' indichi la parte AD con la sola lettera A, e la rimanente parte DB con la B; è manifesto, che tutta sarà A + B.

$A + B \times A + B = A^2 + 2 AB + B^2$.

Similmente $A + B \times A = A^2 + AB$:
ed $A + B \times B = B^2 + A$. Dunque il quadrato di tutta A + B è uguale a' due rettangoli fatti dall' intiera A + B in ciascuna delle due sue parti.

SI alzi perpendicolarmente ad *AB* la retta *AF* uguale alla parte *AD*, e compiuto il rettangolo *AFGB*, che è contenuto da tutta l' *AB*, e dalla parte *AD*, si tiri la *DH* parallela ad *AF*, sarà *FADH* il quadrato di *AD*, ed *HDBG* il rettangolo contenuto dalle parti *AD*, *BD*(essendo *HD* uguale ad *AD*); dunque essendo il rettangolo di *AD* in *AB*, cioè *AFGB*, uguale a questi due spazj; è manifesto, che uguaglia il quadrato *AD*, ed il rettangolo *ADB*. (a)

PRO-

(a) *Esempio Numerico.*

Sia A B di 10 palmi; A D di 4; D B di 6.
Il rettangolo di tutta l' A B nella sua parte A D sarà di palmi 40.

Il quadrato dell' istessa A D è di palmi 16.
Il rettangolo delle parti, cioè di
4 in 6, è di palmi - - - - - - - - - - - - 24.
La somma sarà di palmi 40.

Esempio Analitico.

Si rappresenti la linea A D con la lettera A, e la D B con l' altra B; tutta sarà A + B.

$$A + B \times A = A^2 + BA.$$

Parimente $A \times A = A^2$;

$A \times B = AB$. Sicchè il rettangolo di tutta in una sua parte è uguale al quadrato di essa parte, insieme col rettangolo di ambe le parti.

PROPOSIZIONE IV.

Essendo la retta AB *divisa in* C; *il quadrato di tutta l'* AB *è uguale a' quadrati delle parti* AC, CB, *ed a' due rettangoli contenuti da esse parti, cioè da* AC *in* CB.

FIG. 52.

DEscrivasi esso quadrato *ABDE*, e tirato il diametro *BE* venga segato in *G* dalla *GF* parallela al lato *BD*, e si tiri per *G* la *HGI* parallela ad *AB*. Essendo i lati *AB AE* uguali, l'angolo *AEB* uguaglia l'angolo *ABE* [a], a cui pure è uguale *HGE* [b]; dunque sono gli angoli *GEH*, *HGE* uguali, e però *EHGF* è il quadrato di *HG*, cioè di *AC*: similmente *CGIB* si mostrerà essere il quadrato di *CB*; come ancora può dedursi dall' essere tutta la *FC* uguale ad *AB*, e la parte *FG* uguale ad *AC*, e però la rimanente *CG* uguale a *CB*. Li due complementi *ACGH*, *FGID* sono uguali, e contenuti da lati uguali alle parti *AC*, *CB*. Dunque essendo il quadrato *ABDE* uguale alli spazj *EHGF*, *CGIB*, *ACGH*, *FGID*; è manifesto, essere uguale a' quadrati delle parti *AC*, *CB*; ed a due rettangoli contenuti da esse parti; il che era da dimostrarsi (*a*).

a 5. 1.
b 29. 1.

Co-

(*a*) *Esempio Numerico*.

Sia tutta l'AB di palmi 9, AC sia di 3, e CE di 6 palmi.

Sarà

COROLLARIO. Li rettangoli, che si fanno intorno il diametro d' un quadrato, sono quadrati, come si è dimostrato *EHGF* essere quadrato di *AC*, ed *IBCG* il quadrato di *BC*.

PROPOSIZIONE V.

FIG. 53. *Se la retta* AC *è diviso per mezzo in* B, *ed in parti disuguali nel punto* D; *il quadrato della metà di essa* BC *è uguale al rettangolo delle parti disuguali* AD, DC, *col quadrato del segmento intermedio* BD.

Si

Sarà il quadrato di tutta AB		di palmi 81.
Il quadrato dell' AC	è di	9.
Il quadrato della CB	di	36.
Un rettangolo di AC in CB	di	18.
Un altro pure di		18.
La somma dovrà essere di palmi		81.

Esempio Analitico.

Esprimasi l' AC con la lettera A, e CB con la B.

$A+B \times A+B = A^2 + AB + AB + B^2$.

Similmente $A \times A = A^2$;

$B \times B = B^2$;

$A \times B = AB$;

$A \times B = AB$ Dunque il quadrato di tutta è uguale a' due quadrati delle parti, insieme col doppio rettangolo delle parti istesse;

SI descriva il quadrato di essa *BC*, il quale sia *BCEF*, e tirato il diametro *CF*, si conduca la *DH* parallela a *CE*, la quale seghi il diametro in *G*, e si tiri per il punto *G* la retta *IGLK*, concorrente co' lati *CE*, *BF*, in *I*, *L*, e con la *AK* parallela a detti lati, in *K*. Sarà il rettangolo *GIEH* uguale a *BDGL* [a], ed aggiunto di comune il quadrato *DGIC*, sarà *DCEH* uguale al rettangolo *BCIL*, ovvero al rettangolo *ABLK*, uguale a questo, per essere ambidue sopra basi uguali *CB*, *AB* [b]; ed aggiunto di comune il rettangolo *BDGL*, sarà il Gnomone *HGLBCE* uguale al rettangolo *ADGK*, il quale è contenuto dalla retta *AD*, e dalla *DG* uguale a *DC*; onde apposto ad entrambi il quadrato *LGHF*, che è quadrato di *BD*, sarà il Gnomone con tale quadrato, cioè il quadrato intiero *BCEF*, uguale al rettangolo delle parti disuguali *ADC*, col quadrato della parte intermedia *BD*; il che doveasi dimostrare (a).

a 43. 1.

b 3. 1.

E PRO-

(a) *Esempio Numerico*.

Sia l' AC di 12 palmi; divisa pel mezzo in B, e disugualmente in D, e sia DC di 2 palmi; onde AD sarà di 10, e DB di 4.

Il quadrato della BC, cioè di 6, è di palmi 36.

Il rettangolo d' AD in DC, cioè di 10 in 2, è 20.
Il quadrato della BD intermedia, cioè di 4, è 16.
La somma adunque sarà di palmi 36.

Esem-

PROPOSIZIONE VI.

Fig. 54.

Se alla retta AC, divisa per mezzo in B, si aggiunga per diritto la retta CD; il rettangolo di tutta la composta AD nell' aggiunta CD col quadrato della metà BC, uguaglia il quadrato della BD composta della metà, e dell' aggiunta.

Perchè descritto il quadrato, *BDHF*, e tirato il diametro *DF*, da cui si seghi la *CE* parallela a *BF* in *I*, e per lo punto *I* tirata la *GH* concorrente co' lati *DH*, *BF* in *G*, *L*, e con l' *AK* parallela a *BF* in *K*; sarà il rettangolo *ABLK* uguale a *BCIL*, per essere sopra uguali basi a; ed è *BCIL* uguale all' altro complemento *GIEH* b; dunque *ABLK* uguaglia *GIEH*, ed aggiunto ad ambedue il rettangolo *BDGL*, sarà tutto il rettangolo *ADGK* (cioè contenuto dalla com-

a 36. 1.
b 43. 1.

Esempio Analitico.

S' indichi la prima metà AB con le due lettere $A+B$; la parte intermedia BD con la lettera A, e la rimanente porzione DC, che dà il compimento all' altra metà, con la lettera B. E' chiaro, che tutta l' AC dovrà esprimersi così:

$A+B$, $A+B$.

$A+B \times A+B = A^2 + AB + AB + B^2$.

Parimente $A+B+A \times B = AB + B^2 + AB$.

ed $A \times A = A^2$. Onde il quadrato della metà uguaglia il rettangolo delle disuguali porzioni di tutta insieme col quadrato della intermedia.

composta *AD*, e dall' aggiunta *DC* uguale a *DG*) uguale al Gnomone *BLIEHD*, dunque aggiunto ad ambedue il quadrato *LIEF* (che è il quadrato della metà *BC*) riesce il rettangolo *ADC*, col quadrato *BC*, uguale al detto Gnomone collo stesso quadrato, cioè a tutto il quadrato *BDHF*. Il che ec. (a).

PROPOSIZIONE VII.

Essendo la retta AB *comunque segata in* C; *li quadrati di tutta l'*AB, *e di una sua parte* CB, *sono uguali al duplo del rettangolo di* AB *nella stessa* CB, *col quadrato della rimanente* AC. FIG. 55.

SI descrivano essi due quadrati *ABDE*, e *CBKI*, e condotto nel maggiore il diametro *BE* segante la *IC* prolungata in *G* si conduca per *G* la *HL* segante i lati *AE*, *BD* in *H*, *L*, e continuata la *CG* convenga col lato *ED* in *F*. Essendo uguali i complementi *ACGH*, *LGFD* [a], a *Pr.* 43. 1.

E 2 ed

(a) *Esempio Numerico*.

Sia AC di 8 palmi, a cui si aggiunga CD di 5 palmi. Sarà l'AD di 13 palmi. E siccome l'AB è 4; la BD dovrà essere di palmi 9. Onde il rettangolo di AD in DC; cioè di 13. in 5 uguaglierà 65.

Il quadrato di BC, cioè del 4 sarà 16.

E la somma 81. com' è appunto il quadrato della BD, cioè dal 9, che viene di palmi 81.

Esem-

ed i quadrati *CGLB*, *ICBK* fatti ſopra lo ſteſſo lato *CB*, ſarà il rettangolo *ABLH* (contenuto da *AB* in *BC*) uguale alla ſomma del rettangolo *LGFD*, e del quadrato *ICBK*; e però il Gnomone *AHGFDB*, col quadrato *ICBK* uguaglia il duplo del rettangolo di *AB* in *BC*. Aggiunto dunque da ambe le parti il quadrato *HGFE*, che è il quadrato di *AC*, ſarà tutto il quadrato *ABDE*, col quadrato *CBKI*, uguale al duplo rettangolo *ABC*, col quadrato *AC*; il che dovea dimoſtrarſi. (a)

PRO-

Eſempio Analitico.

Eſprimaſi la prima metà AB con la lettera A, e l'altra metà BC parimente con l'iſteſſa lettera A, la linea aggiunta CD con la lettera B; quindi tutta la compoſta AD ſarà A + A + B, e la linea CD compoſta della metà, e dell' aggiunta ſarà A + B.

$A + A + B \times B = AB + AB + B^2$:

$A \times A = A^2$.

Parimente $A + B \times A + B = AB + A^2 + B^2 + AB$.

(a) *Eſempio Numerico.*

Sia AB di palmi 9, CB ſia di 3; ſarà AC di 6 palmi. Onde il quadrato della AB ſarà uguale a palmi 81.
e il quadrato della CB a palmi 9.
Somma di palmi 90.

In

PROPOSIZIONE VIII.

Se alla retta AB *comunque segata in* C *si aggiunga per diritto la retta* BD *uguale a* BC, *il quadrato della composta* AD *uguaglia quattro rettangoli di* AB *in* BC, *col quadrato della rimanente* AC.

Descritto il quadrato *ADKG*, e condotte le *BI*, *CH* parallele al lato *AG*, si seghino col diametro *DG* in *N*, *P*, e per questi punti sieno tirate le *ENM*, *FPL*, seganti le altre rette *CH*, *BI* in *O*, *Q*. E' manifesto, essere il rettangolo *ABNE* uguale ad *NMKI*[a], a cui pure è uguale *ONIH*, per essere le basi *ON*, *NM* tra di loro uguali (come lo sono *CB*, e *BD*); ed al rettangolo *EOPF*, che uguaglia *PQHI*[a], aggiunto il quadrato *BDMN*, (uguale all' altro *ONQP*)

a 43. 1.

Inoltre saranno due rettangoli di AB in BC, cioè di 9 in 3, di palmi 54.
e il quadrato dell' altra parte AC, cioè di 6, uguaglierà palmi 36.
Somma di palmi 90.

Esempio Analitico.

Sia l' AC indicata dalla sola lettera A, e CB dall' altra B; sicchè tutta AB sia A + B.

$A + B \times A + B = A^2 + 2AB + B^2$;

e $B \times B = B^2$.

Similmente $A + B \times B = AB + B^2$.

ed $A + B \times B = AB + B^2$.

ed $A \times A = A^2$.

ONPQ) sarà uguale la loro somma al rettangolo *ONIH* ed a ciascheduno degli altri due *NMKI*, ed *ABNE*, contenuto dall'*AB*, e dalla *BC*, che uguaglia *BN*, ovvero *BD*. Dunque il Gnomone *AFPHKD* è quadruplo del rettangolo di *AB* in *BC*; ed aggiunto di quà, e di là il rettangolo *FPHG*, che è il quadrato di *AC*, sarà tutto il quadrato *ADKG* uguale alli quattro rettangoli di *AB* in *BC*, col quadrato della rimanente *AC*; il che dovea dimostrarsi (*a*).

PROPOSIZIONE IX.

La retta AC *essendo segata in parti uguali nel punto* B, *ed in disuguali nel punto* D; *saranno li quadrati delle parti disuguali* AD, DC *il doppio del quadrato della metà* AB, *e del quadrato della linea intermedia* BD.

Si

(*a*) *Esempio Numerico*.

Sia l'AB di palmi 6 divisa in C in maniera, che AC sia 5, e CB 1. La BD parimente, come uguale a CB, sia 1. Dunque tutta AD dovrà essere palmi 7, il cui quadrato sarà di palmi 49.

Il rettangolo di AB in BC, cioè di 6 in 1 è uguale a palmi 6, che moltiplicando per 4 formerà palmi 24.

Inoltre sarà il quadrato di AC, cioè di 5, uguale a palmi 25.

La somma darà palmi 49.

Esem-

SI alzi dal punto *B* ad angoli retti la *BE* uguale ad *AB*, e congiunte le rette *AE*, *CE*, si tiri la *DF* perpendicolare anch' essa ad *AD*, cioè parallela a *BE*, e posta *FG* parallela a *BD*, si congiunga *AF*. Essendo i lati *AB*, *BE* uguali intorno l' angolo retto *B*, saranno uguali li due angoli *BAE*, *BEA* [a], che uguagliano un altro retto [b], e però saranno semiretti. Similmente gli angoli *BEC*, *BCE* per la stessa ragione sono semiretti; dunque è retto l' angolo *AEC* composto di due semiretti; e saranno ancora semiretti gli angoli *FEG*, *DFC*; che uguagliano ciascheduno delli due *BCF*, *BEC* [c]; dunque *EG* uguaglia *GF*, cioè *BD*, e *DF* uguaglia *DC*: Per tanto li due quadrati *AD*, *DC* sono uguali alli due *AD*, *DF*, cioè al quadrato *AF* [d]; ovvero alli due quadrati *AE*, *EF* [d]; ed è il quadrato *AE* duplo del quadrato *AB*; essendo uguale

a 5. 1.
b 32. 1.
c 29. 1.
d 47. 1.

Esempio Analitico.

Si denoti l' AC con la lettera A, CB con l' altra B, sicchè tutta l' AB sarà A + B. La BD per essere uguale a CB: anch' essa esprimasi con la lettera istessa B, è chiaro, che tutta l' AD sarà A + B + B.

$A + B + B \times A + B + B = A^2 + AB + AB + BA + B^2 + B^2 + BA + B^2 + B^2.$

Tutto questo prodotto equivale ad $A^2 + 4AB + 4B^2$;

Parimente $4A + 4B \times 4B = 4AB + 4B^2$.

$A \times A = A^2$.

guale ad ambidue li quadrati *AB*, *BE* tra di loro uguali; ed il quadrato *EF* è parimente duplo del quadrato *BD*, uguagliando li due quadrati *EG*, *GF* uguali a quello di *BD*. Dunque li quadrati delle parti disuguali *AD*, *DC* sono il doppio del quadrato della metà *AB*, e del quadrato della parte intermedia *BD*; il che ec. (a)

PRO-

(a) *Esempio Numerico.*

Sia l'AB di palmi 5, BD di 3; la DC dovrà essere di due palmi; e l'altra parte disuguale AD sarà di 8. Onde per la proposizione il quadrato d'AD è di palmi 64
e il quadrato della DC di palmi 4.
Somma di palmi 68.
Inoltre il quadrato dell'AB è di palmi 25
e il quadrato della BD è di palmi 9.
La somma sarà di palmi 34., che è la metà di palmi 68.

Esempio Analitico.

S'indichi l'AB con le due solite lettere $A+B$, la BD con la lettera A in guisa che l'AD debba rappresentarsi con le tre lettere $A+B+A$; e la DC con la B.

$$A+B+A \times A+B+A = A^2+AB+A^2+BA+B^2+BA+A^2+AB+A^2;$$

Tutto questo prodotto $= 4A^2+4AB+B^2$.
Aggiunto ad esso il quadrato di B, avremo per somma $4A^2+4AB+2B^2$.

PROPOSIZIONE X.

Se alla retta AC, *divisa ugualmente in* B *si aggiunga per diritto un' altra retta* CD; *il quadrato della composta* AD, *e dell' aggiunta* CD *sono il duplo del quadrato della metà* AB, *e della* BD *composta della metà, e dell' aggiunta.* FIG. 58.

ALzata *BE* perpendicolare ad *AB*, ed uguale alla stessa, si congiungano *AE*, *EC*; e tirata la *DF* parallela ad *EB* concorra colla *EC* in *F*, e si tiri *FG* parallela a *BD*, che convenga colla *EB* in *G*; indi congiungasi *AF*. E' manifesto, essere l'angolo *AEC* retto; essendo semiretti gli angoli *AEB*, *BEC*, come ancora li altri *DCF*, *DFC*, *CFG*, come si è provato nell' antecedente proposizione; e però *DF* è uguale a *DC*, ed *EG* uguale ad *FG*, cioè alla *BD*; onde il quadrato *EF* è duplo del quadrato *BD*, ed il quadrato *AE*, è duplo del quadrato *AB*, a' quali essendo uguale il quadrato *AF*, per essere l' angolo *AEF* retto; e lo stesso essendo uguale a' quadrati *AD*, *DF* (per essere ancora retto l' angolo *ADF*) cioè a' quadrati *AD*, *DC*; è manifesto, che questi due quadrati *AD*, *DC* sono uguali

---

In simil maniera $A + B \times A + B = A^2 + B^2 + 2AB$:

ed $A \times A = A^2$.

Onde questa somma sarà $= 2A^2 + B^2 + 2AB$, che è la metà dell' altra somma poco sopra in questo Esempio prodotta.

uguali al doppio del quadrato *AB*, ed al doppio del quadrato *BD*; il che ec. (a).

PROPOSIZIONE XI. PROBL.

FIG. 59. *Segare una data retta linea* AB *in* C *talmente che il rettangolo di essa* AB *nella parte minore* BC *rie-*

(a) *Esempio Numerico:*

Sia AC di 8 palmi, e l'aggiunta CD di 2; sarà AD di palmi 10, e BD di 6. Onde sarà il quadrato di AD, cioè di 10, uguale a palmi 100.
è il quadrato di CD, cioè di 2, uguale a palmi 4
Somma di palmi 104.
Inoltre il quadrato di AB, cioè di 4, è di palmi 16.
Il quadrato della BD, cioè di 6, è di palmi 36.
Sicchè la somma di palmi 52.
è la metà di 104 palmi.

Esempio Analitico:

Esprimasi l'AB con la sola lettera A, BC come uguale ad AB con l'istessa A, e l'aggiunta CD con la lettera B: onde BD dovrà indicarsi con le due lettere A + B, e tutta la composta AD con le tre lettere A + A + B, delle quali facendosi il quadrato, avremo l'istesso prodotto, che si ebbe nell'esempio analitico della proposizione precedente, ed è questo:
$4A^2$

riesca uguale al quadrato della rimanente parte maggiore AC.

DEscritto il quadrato di tutta l'*AB*, il quale sia *ABDE*; si divida per mezzo in *F* un lato *AE* contiguo ad essa *AB*; e congiunta la retta *BF*; si prolunghi *FA* verso *G* in maniera, che sia *FG* uguale ad *FB*; indi sopra l'eccesso *AG* si descriva il quadrato *AGIC*, il cui lato *IC* prolungato seghi i lati *AB*, *ED* in *C*, ed *H*. Dico essere il punto *C* quel segamento della retta *AB*, che si ricercava. Perchè essendo *AE* divisa per mezzo in *F*, ed aggiuntavi *AG*, sarà il rettangolo *EGA* (cioè *EGIH*, per essere *GI* uguale a *GA*) insieme col quadrato *AF*, uguale al quadrato *FG* a, cioè al quadrato *FB*, che uguaglia *FG*, oppure alli due quadrati *AB*; *AF*; che uguagliano esso quadrato *FB* b; però tolto di comune il quadrato *AF*, rimane il rettangolo *EGIH* uguale al quadrato *ABDE*; e tolto di comune *ACHE*; resta il quadrato *ACIG* uguale al rettan-

a 6. 2.

b 47. 1.

$4A^2 + 4AB + B^2$. Ad un tal prodotto unito il quadrato dell'aggiunta, qual'è B^2, tutta la somma sarà

$$4A^2 + 4AB + 2B^2.$$

In simil guisa $A+B \times A+B = A^2 + B^2 + 2AB$:
ed $A \times A = A^2$.

Dunque la somma quindi resultante, qual'è

$2A^2 + B^2 + 2AB$, riesce la metà della somma quivi poco sopra descritta.

tangolo *DBCH*, cioè il quadrato *AC* uguale al rettangolo *ABC*; il che era il quesito (a).

PROPOSIZIONE XII.

FIG. 60. *Ne' triangoli ottusiangoli, come* ABC, *il quadrato del lato* AC *opposto all' angolo ottuso è maggiore de' quadrati degli altri due lati* AB, BC, *e li supera di due rettangoli contenuti da uno di essi lati* CB, *e dalla porzione* BD *intercetta fra l' angolo* B, *e la perpendicolare* AD *tirata sopra il lato* CB *prolungato, dall' angolo* A *opposto ad esso.*

a 47. 1.
b 4. 2.

IMperocchè il quadrato *AC* uguaglia li due quadrati *AD*, *CD*[a]; ma il quadrato *CD* è uguale a' quadrati *CB*, *BD*, ed a' due rettangoli *CBD*: dunque il quadrato *AC*, è uguale a' quadrati *AD*, *BD*, *CB*, ed a' due rettangoli *CBD*; essendo adunque li due quadrati *AD*, *BD* uguale al quadrato *AB*[a]; ne segue, che il quadrato *AC* è uguale a' quadrati *AB*, *CB*, ed a' due rettangoli *CBD*; il che ec.

PROPOSIZIONE XIII.

FIG. 61. *Il quadrato del lato* AC *opposto ad un angolo acuto* B *del triangolo* ABC *è minore de' quadrati de' lati* AB, CB, *da' quali è superato per due rettangoli* CBD *compresi da uno de' lati* CB, *e dall' intercetta* DB *fra l' angolo* B, *e la perpendicolare condotta sopra* CB *dall' opposto angolo* A.

Im-

(a) Un tal Problema non può sciorsi in numero, poichè non può alcun numero segarsi in tal modo, che il prodotto di tutto esso numero in una sua parte uguagli il quadrato dell' altro.

IMperocchè il quadrato *CB* col quadrato *DB* è uguale a due rettangoli *CBD*, ed al quadrato *CD* [a]. Si aggiunga a questi, e a quelli il quadrato della perpendicolare *AD*, sarà la somma de' quadrati *CB*, *BD*, ed *AD* uguale alla somma de' due rettangoli *CBD*, del quadrato *CD*, e del quadrato *AD*: ma li due quadrati *BD*, ed *AD* uguagliano il quadrato *AB*; e li due quadrati *CD*, *AD* sono uguali al quadrato *AC* [b]; dunque li quadrati *AB*, *CB* sono uguali al quadrato *AC* con due rettangoli *CBD*, e però il quadrato *AC* è minore de' due quadrati *AB*, *CB* della quantità di detti due rettangoli; il che ec.

a 7. 2.

b 47. 1.

PROPOSIZIONE XIV. PROBL.

Ritrovare un quadrato uguale ad un dato rettilineo A.

FIG. 62.

SI faccia in un angolo un parallelogrammo *BDEF* uguale al dato rettilineo *A* [c], e si prolunghi *BD* in *G*, sicchè sia *DG* uguale al lato *DE*, poscia divisa per mezzo la *BG* in *C*, dal centro *C* descrivasi col raggio *CB* il semicircolo *BHG*, a cui si stenda il lato *DE*, il quale concorra colla periferia in *H*. Dico essere il quadrato *DH* uguale al detto rettilineo *A*. Imperocchè congiunta *CH*, sarà il quadrato *CH* uguale a' due quadrati *CD*, *DH* [d]; ma il raggio *CH* uguaglia il raggio *CG*; dunque i due quadrati *CD*, e *DH* uguagliano il quadrato *CG*. Ma per essere *BG* segata pel mezzo in *C*, e non pel

c 45. 1.

d 47. 1.

pel mezzo in *D*, esso quadrato *CG* uguaglia il rettangolo *BDG*, col quadrato *CD* [a]; dunque il quadrato *CD* col quadrato *DH* è uguale al quadrato *CD* col rettangolo *BDG*, e però il quadrato *DH* uguaglia esso rettangolo *BDG*, o *BDEF*: ma questo si era fatto uguale al rettilineo *A*; dunque al medesimo rettilineo è uguale il quadrato *DH*, che dovea ritrovarsi (*a*).

a 5. 1.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE
LIBRO III. (*b*)

DEFINIZIONI.

I. UNa linea retta dicesi TANGENTE del Cerchio, se incontrandosi in qualche punto della sua circonfe-

(*a*) Dalla dimostrazione di questo Problema si viene in chiaro, che, se da un punto della circonferenza circolare conducasi al diametro una perpendicolare, il quadrato di questa uguaglierà il rettangolo compreso da' segmenti, o dalle porzioni del diametro istesso. Poichè si è provato essere il quadrato di HD uguale al rettangolo di BD in DG.

(*b*) Il disegno di Euclide in questo terzo libro si è, di mo-

ferenza, benchè si prolunghi, non la sega (a);

II. Similmente diconsi TOCCARE le circonferenze de' Cerchj, quando in qualche punto convengono, ma non si segano (b).

III. Diconsi EGUALMENTE dal centro DISTANTI quelle rette linee, sopra di cui le perpendicolari condotte da esso centro si trovano uguali (c).

IV. SEGMENTO di cerchio chiamasi quella porzio-

mostrarci le proprietà fondamentali di questa figura piana, che è fra tutte la più semplice, la più perfetta, e la più facile eziandio a delinearsi, qual' è il cerchio. Con tutto queste però niuna ve ne ha, che più di essa figura circolare abbia occupati, e tormentati, e il peggio si è, senza frutto, gl' ingegni dei più valenti Geometri per la ricerca da essi fatta d' un piano rettilineo uguale ad un piano circolare. Lo che se fosse loro riescito, avrebbero ottenuta altresì la quadratura del cerchio, vale a dire avrebbero potuto determinare un quadrato uguale al piano circolare; e ciò per la proposizione ultima del secondo libro. Quanto è nobile, e maravigliosa fra tutte l' altre figure la natura del circolo, altrettanto mirabili, e singolari sono le proprietà, che competono a quelle rette, che s' incontrano con la circonferenza di lui, o che si congiungono insieme, e formano gli angoli dentro di esso; le quali proprietà sono in questo Libro dimostrate, le di cui più celebri Proposizioni sono otto: la 16. 20. 21. 22. 31. 32. 35. 36.

(a) Vedasi la Fig. 78. della Tav. IV., in cui la retta E A incontrasi nel punto A della circonferenza, e prolungata essa retta in D non la sega. Che se ella entrasse dentro del cerchio, e segasse la Circonferenza, si chiamerebbe *segante*.

(b) Nella circonferenza del cerchio sono da distinguersi il di lei convesso, ed il concavo. La Fig. 73. ci rappresenta un cerchio minore D B, che colla sua circonferenza tocca nel punto B il concavo della circonferenza del cerchio maggiore A B. La Fig. 74. ci dimostra le circonferenze di due cerchi toccantisi a vicenda nel convesso nel punto B:

(c) Si osservi la Fig. 76., in cui le rette C A D B diconsi *ugualmente distanti*, qualora le perpendicolari E F, E G condotte dal centro C sopra le medesime C A, D B, sieno uguali.

gione, che da un arco di esso, e dalla corda di una linea retta al medesimo sottotesa, è contenuto (a).

V. ANGOLO DEL SEGMENTO si nomina quello, che nel termine dell'arco della sua periferia, e dalla corda sottoposta comprendesi (b).

VI. ANGOLO poi NEL SEGMENTO dicesi qualunque di quelli, che dalle rette condotte da ambi i termini della corda a qualunque punto dell'arco sono contenuti (c).

VII. Lo stesso angolo si dice INSISTERE sopra l'arco circolare opposto, il quale arco con quello

(a) E' da sapersi primieramente, che quella retta, la quale tagliando la circonferenza non passa pel centro, e però divide il cerchio in parti disuguali, chiamasi *corda*; e secondariamente che quelle porzioni di circonferenza, che vengono segate da essa corda, diconsi *archi*: così nella Fig. 82. la retta AC è la corda segante la circonferenza circolare ne' punti A, e C; e le porzioni ADC, ABC di essa circonferenza sono gli archi corrispondenti, segati dalla mentovata corda: in terzo luogo tutto quello spazio, che vien compreso dalla corda, e dall' arco, oppure, che è lo stesso, le porzioni disuguali del circolo diviso dalla corda suddetta addimandansi *porzioni* o *segmenti*, quali sono ADC, ABC. Finalmente quella corda AC, che sega il circolo in due disuguali segmenti suole anche chiamarsi *base* dell' uno, e dell' altro segmento.

(b) Tale è nella Fig. 77. l'angolo ACL quale nel termine dell' arco CLA è formato dall' arco istesso, e dalla corda sottoposta AC; onde è manifesto, che l' *angolo nel segmento* è mistilineo, perchè fatto da una curva, e da una retta.

(c) L'*angolo nel segmento*, a differenza di quello *del segmento*, è rettilineo, perchè formato da due rette, che partonsi dalle estremità d'una corda, e vanno a congiungersi insieme ad un punto dell' arco: così nella Fig. 82. l'angolo ABC compreso dalle due rette AB, CB, che si partono da' due estremi della corda AC, e che congiungonsi nel punto B dell' arco, *è nel segmento*, vale a dire *è inscritto nel segmento* ABC.

lo del ſegmento, in cui ritrovaſi l'angolo, compiſce il cerchio (a)

VIII. SETTORE ſi chiama lo ſpazio compreſo da due raggi del cerchio, e dall'arco da eſſi intercetto (b).

IX. SEGMENTI SIMILI diconſi quelli, che comprendono angoli uguali, contenuti dalle rette tirate da qualunque punto dell'arco a' termini della corda (c).

PROPOSIZIONE I. PROBL.

Trovare il centro E *d'un dato cerchio* ABC. FIG. 36.

SI tiri dentro di eſſo qualunque retta *AC*, e dividaſi per mezzo in *F* a, indi ſi alzi ſopra di eſſa una perpendicolare *FB*, la quale ſeghi la circonferenza in *B*, ed *H* b; e diviſa pure eſſa *BH* per mezzo in *E*, dico eſſere queſto punto *E* il centro ricercato. Imperocchè ſe foſſe fuori della linea *BH*, come in *G*, tirate le linee *GA*, *GC* ſarebbero uguali; e congiunta *GF*, eſſendo comune a triangoli *GFA*, *GFC*, in cui pure i lati *AF*, *FC* ſono uguali, ſarebbe pure l'angolo *AFG* uguale al conſeguente *GFC* c, e però ambedue retti; dunque l'angolo *AFG* ſarebbe uguale all'angolo *AFE*, che ſi era pure fatto retto dalla per-

a 10. 1.

b 11. 1.

c 8. 1.

F pen-

(a) L'*angolo nel ſegmento* ABD, come può vederſi nella Fig. 86., diceſi *inſiſtere* ſopra l'arco circolare oppoſto AB, qualora queſto arco AB con l'arco del ſegmento BDA compiſca il cerchio.

(b) Si oſſervi la Fig. 76., e troveremo un *ſettore* AEB, che è tutto quello ſpazio contenuto da' raggi EA, EB, e dall'arco AB.

(c) Se nelle Fig. 87 88. ſuppongaſi l'angolo AEB della prima uguale all'angolo BED della ſeconda; i due ſegmenti BEA, DEB ſi dovranno chiamare *ſimili*;

a Assiom. 7. b Assiom. 6.

perpendicolare *FB* [a]; il che è assurdo [b]; dunque il centro non è fuori della retta *BH*, nè può essere altrove, che nel mezzo di essa; e però *E* è il centro ricercato.

COROLLARIO. Condotta dunque nel cerchio qualunque linea *CA*, e dal punto di mezzo *F* eretta la perpendicolare, in essa deve sempre essere il centro del cerchio.

PROPOSIZIONE II.

FIG. 64.

La retta A B, *che congiunge due punti* A, B *della periferia d'un cerchio, giace tutta dentro al medesimo cerchio.*

IMperocchè tra' punti *A*, e *B* preso qualunque punto *D* in essa linea, ed al centro *C* congiunte le rette *CA*, *CB*, *CD*, o saranno gli angoli *ADC*, *BDC* retti, o l'uno acuto, l'altro ottuso; sia per esempio *ADC* ottuso, o retto; gli altri angoli saranno in esso triangolo acuti [c], e però il lato *AC* sarà maggiore di *CD* [d]; ma segandosi la circonferenza da essa *CD* in *F*, la *CF* uguaglia il raggio *AC*; dunque essendo *DC* minore del raggio *CF*, il punto *D* è più accosto al centro, che non è la periferia del cerchio; e però qualunque punto *D* della retta *AB* si prova dentro al circolo; dunque giace tutta la linea *AB* dentro al medesimo; il che ec. (*a*).

c 17. 1. d 19. 1.

PRO-

(*a*) Da ciò sembra potersene inferire, che la Tangente in un sol punto s'incontra col cerchio, e lo tocca: poichè se in due punti lo toccasse, o s'incontrasse con esso, ella caderebbe dentro del medesimo, e perciò non tangente, ma segante dovrebbe appellarsi.

PROPOSIZIONE III.

Se nel cerchio ABCD *la retta* BD, *che passa pel centro* E, *sega per mezzo la retta* AC, *che non passa pel centro, la segherà ad angolo retto: e viceversa se la sega ad angolo retto in* F, *ivi la divide pel mezzo.* FIG. 63.

PErchè ne' triangoli *AEF*, *CEF* essendo il lato *EF* comune, se ancora il lato *AF* uguaglia *FC*, e la base *AE* è uguale all'altra *EC*, gli angoli *AFE*, e *CFE* saranno uguali a, e però retti; e se sono questi retti, essendo ancora gli angoli *CAF*, *ECF* uguali b, ad il lato *EF* comune, sarà ancora il lato *AF* uguale ad *FC* c; il che ec.

a 8. 1.
b 5. 1.
c 26. 1.

PROPOSIZIONE IV.

Se due linee AB, CD, *che non passano pel centro, si segano in* F, *non saranno ivi ambedue divise pel mezzo.* FIG. 66.

DAl centro *E* si conduca la *EF*. Se fosse *AB* divisa pel mezzo in *F*, le sarebbe *EF* perpendicolare d; e se pure *CD* si dividesse per mezzo nel medesimo punto *F*, sarebbe a questa ancora perpendicolare la stessa *EF*; dunque l'angolo retto *AFE* uguaglierebbe il retto *CFE*, onde il tutto sarebbe uguale alla parte; il che è impossibile e. Dunque non si segano l'una, e l'altra pel mezzo fuori del centro. Il che era da dimostrarsi.

d 3. III.
e Assiom. 6.

PROPOSIZIONE V.

FIG. 67.

Se due cerchi AB, CD, *si seghino in* B, *non avranno il medesimo centro* E *comune ad entrambi*.

IMperocchè congiunta al segamento la retta *EB*, e tirata qualunque altra *EAD*, che seghi ambedue la circonferenza, ove sono distinte, in *A*, *D*, se fosse il punto *E* centro d'ambi i cerchj, sarebbe *EB* uguale tanto ad *EA*, che ad *ED*, onde queste due sarebbero uguali tra loro a, essendo uguali ad una terza; il che è impossibile, perchè il tutto non può essere uguale ad una sua parte [b]; dunque tali cerchj non hanno un centro comune *E*; il che era da dimostrarsi.

a *Assiom.* 1.
b *Assiom.* 6.

PROPOSIZIONE VI.

FIG. 68.

Parimente se detti cerchj si toccassero in B, *non potrebbero avere un centro comune* E.

PErchè giunta al contatto *EB*, e tirata l'altra *EAD*, ne seguirebbe lo stesso assurdo, come nell' antecedente. Dunque è verissima ancora questa proposta.

PROPOSIZIONE VII.

TAV. IV. FIG. 69.

Preso dentro al cerchio ADB *il punto* G *fuori del centro* E *e condotta pel centro la retta* GEA, *continuata dall' altra parte in* B, *e tirate altre rette* GF, GD; *sarà primieramente la* GA *massima di tutte; secondo la* GF *più vicina alla massima sarà maggiore della* GD *più lontana da essa; terzo la* GB *residua del diametro è la minima di tutte; quarto fa-*

facendo l'angolo GEH *uguale all'altro* GEF, *congiunta* GH; *riuscirà uguale a* GF; *onde due sole linee si possono tirare tra di loro uguali dal punto* G *alla circonferenza, una di quà, ed una di là dalla massima.*

Tirati dal centro *E* i raggi *EF*, *ED*, *EH*, essendo *EF* uguale ad *EA*, aggiunta ad ambedue la *EG*, sarà *GA* uguale a' due lati *GE*, *EF*, i quali sono maggiori del terzo *GF* [a]; dunque *GA* è maggiore di *GF*: e similmente si mostrerebbe maggiore di qualunque altra *GD*, che però è la massima di tutte, come in primo luogo dovea dimostrarsi.

a 20. 1.

Secondo essendo ne' triangoli *GEF*, *GED* il lato *GE* comune, ed il lato *EF* uguale ad *ED*, ma l'angolo *GEF* maggiore di *GED*; sarà la base *GF* maggiore dell'altra *GD* [b]; e però la retta più prossima alla massima *GA*, è maggiore della più lontana.

b 24. 1.

Terzo quindi la *GB* direttamente opposta alla massima *GA*, e però più remota da essa di qualunque altra, è la minima di tutte, essendo qualunque *GD* maggiore di essa, perchè *GD* con *GE* è maggiore di *ED* [c], e però maggiore di *EB*; onde tolta di comune *GE*, rimane *GD* maggiore di *GB* [d].

c 20. 1.

d Assiom. 5.

Quarto essendo fatti gli angoli al centro uguali *GEH*, *GEF* contenuti da lati uguali, essendo *GE* comune, ed *EH* uguale ad *EF*, le basi *GH*, *GF* saranno pure uguali [e]; ma se si tirasse da esso punto *G* qualunque altra linea alla circonferenza, sarebbe più vicina, o più lontana dalla massima,

e 4. 1.

che

che non sono queste due; dunque due sole linee uguali si possono tirare da un punto, che non sia centro, alla circonferenza, una di quà, e una di là dalla massima; il che ec.

PROPOSIZIONE VIII.

FIG. 70. *Se il punto G è preso fuori del cerchio, primieramente condotta pel centro la retta* GEA *fino al concavo della circonferenza, sarà questa la massima di tutte. Secondo la* GF *più vicina alla massima sarà maggiore della* GD *più lontana. Terzo la* GB *terminata al convesso della periferia, che continuata passa pel centro, è la minima di tutte. Quarto di tutte le rette terminate al convesso, sempre la* Gf *più vicina alla minima è minore della* Gd *più lontana. Quinto due sole linee uguali una di quà, e una di là dalla massima, e dalla minima potranno tirarsi da esso punto* G *al concavo, o al convesso della circonferenza, facendo al centro gli angoli uguali* GEH, GED, *ovvero* GEh, GEd.

IL primo, ed il secondo si prova come nell'antecedente; il terzo si dimostra ancora, perchè essendo *Ed* con *dG* maggiore di *EG* [a], tolte *Ed*, ed *EB* raggi uguali, rimane *Gd* maggiore di *GB*, e così qualunque altra *Gf* sarà maggiore di *GB*; e però questa è la minima di tutte.

a 20. 1.

Il quarto si prova, perchè le due *Gd*, *dE* sono maggiori delle due *Gf*, *fE* [b]; ma *dE*, *fE* sono uguali; dunque *Gd* è maggiore di *Gf*, e però le più vicine alla minima *GB* sopra il convesso del cerchio sono minori delle più lontane;

b 21. 1.

Il quinto si prova, come il quarto della proposizione precedente.

PRO-

PROPOSIZIONE IX.

FIG. 71.

Se da un punto E *dentro al circolo si possono tirare alla circonferenza più di due linee uguali* EA, ED, EF; *sarà quello il centro di esso cerchio.*

IMperocchè da un punto, che non fosse centro, non si potrebbono tirare, se non se due linee uguali, come si è dimostrato [a].

a 7. III.

PROPOSIZIONE X.

FIG. 72.

Due cerchj non possono segarsi, se non in due soli punti.

PErchè se si segassero in tre punti *A*, *B*, *C*, condotte dal centro *E* di uno di essi le rette *EA*, *EB*, *EC* a' segamenti, essendo uguali, dovrebbe essere il punto *E* centro ancora dell' altro cerchio [b]; il che è impossibile [c].

b 9. III.
c 5. III.

PROPOSIZIONE XI.

FIG. 73.

Se due cerchj si toccano al di dentro in B, *la retta, che congiunge i loro centri* E, C, *prolungata passerà pel contatto* B.

ALtrimenti, se fosse del maggior cerchio il centro *e*, che congiunto col centro *C* del minore segasse le circonferenze, ove sono disgiunte, in *D*, *A*; tirate al contatto le rette *CB*, *eB* essendo *CD* uguale a *CB*, e aggiunto di comune la *Ce*, sarà *De* uguale alle due *BC*, *Ce*; (a) e pe-

(a) Ma le due BC, Ce sono maggiori di Be (Prop. 20. I); dunque anche De sarebbe maggiore di *Be*, ma questa è uguale ad eA; dunque la parte eD sarebbe maggiore del tutto eA.

gliando gli altri due *BG*, *GE*, essendo tanto questi, che quelli uguali al quadrato del raggio; però siccome il quadrato *EF* uguaglierà il quadrato *EG*, ancora i quadrati rimanenti *AF*, *BG* saranno uguali; ed essendo *AF*, *BG* la metà delle rette *AC*, *BD*[a], ancora le intere *AC*, *BD* riescono uguali; il che ec.

a 3. III.

PROPOSIZIONE XV.

FIG. 77.

Delle rette inscritte in un circolo la massima è il diametro, e dell' altre la più vicina IK *al centro* E *è maggiore della più lontana* AC.

Tirate dal centro sopra le rette *AC*, *IK* le perpendicolari *EF*, *EH* si prolunghi questa in *G*, sicchè sia *EG* uguale ad *EF*, e si tiri la *BGD* parallela ad *IK*, cui parimente sarà perpendicolare la *EG*; onde *DB* riuscirà uguale ad *AC*[b]: ma, congiunti i raggi *EI*, *EK*, *ED*, *EB*, essendo gli due lati *IE*, *KE* uguali a' due *BE*, *DE*, ma l' angolo *IEK* maggiore di *BED*; dunque la base *IK* è maggiore dell' altra *BD*[c], e però è maggiore la più vicina al centro della più lontana *AC*, che uguaglia *BD*; ed il diametro è vicino più di tutti al centro; dunque è maggiore di qualunque altra retta non condotta pel centro, e però è la massima di tutte, uguagliando sempre i due raggi, come *EI*, *EK*, i quali sono maggiori della base *IK*[d]; onde è manifesto ciò, che dovea provarsi.

b 14. III.

c 24. I.

d 20. I.

PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 78.

La retta EAD *tirata dal termine* A *del dia*metro

mero A H *perpendicolare ad esso, sarà tangente del cerchio* A B, *rimanendo tutta negli altri punti esteriore alla circonferenza: nè potrà inserirsi veruna linea retta* L A *tra la stessa tangente* A E, *e la circonferenza; e però l'angolo del semicircolo* G A B, *o* C A, *sarà maggiore di qualsivoglia angolo acuto* L A H; *e l'angolo del contatto* F A E *è minore di qualsivoglia piccolo angolo rettilineo* L A E.

Tirata dal centro *C* à qualunque altro punto *D* della retta *EAD*, che nel punto *A* conviene colla circonferenza, la retta *CD*, questa opposta all' angolo retto *CAD* sarà maggiore del raggio *CA* opposto all' angolo acuto *CDA* [a], e però è maggiore del raggio *CB*; dunque il punto *D* è di là dalla circonferenza; e così qualunque altro punto di essa linea *EAD* rimane fuori del cerchio, che però solamente in esso punto *A* resta toccato dalla retta *EAD*, Che poi non possa tra la circonferenza, e la tangente inserirsi al contatto *A* veruna retta *LA*, è manifesto, perchè condotta dal centro *C* la perpendicolare *CG* sopra essa *LA*, sarà *CG* minore di *CA*, come opposta quella ad angolo minore del retto *CGA*, cui si oppone questa [a]; dunque il punto *G* della retta *LA* essendo più vicino del raggio al centro *C*, sarà dentro esso cerchio; e però la retta *LA* sega il circolo, non resta interposta fra la circonferenza, e la tangente; onde l'angolo del semicircolo eccede qualunque angolo acuto *LAC*, e l'angolo del contatto è minore di qualsivoglia piccolissimo angolo *EAL*; il che era da dimostrarsi.

a 19. 1.

PRO-

PROPOSIZIONE XVII. PROBL.

FIG. 79. *Da un dato punto* E *condurre una tangente* E A *al dato cerchio* F B A.

CONgiunta al centro *C* del dato cerchio la retta *E C* segante la periferia in *B*; si descriva col raggio *C E* un altro cerchio concentrico (a) *E D*, e posta *B D* perpendicolare alla *E C*, la quale concorra colla periferia di questo secondo cerchio in *D*, si congiunga *C D* segante la prima data circonferenza in *A*; congiunta *E A* sarà tangente; imperocchè i triangoli *E C A*, *D C B* avendo intorno il comune angolo *C* i lati *C E*, *C A* uguali a *C D*, *C B*, non solo le loro basi *E A*, *B D* saranno uguali, ma ancora gli angoli corrispondenti [a], e però l'angolo *E A C* sarà retto, come l'angolo *D B C*; dunque essendo *A E* perpendicolare al termine del diametro *A C F*, sarà essa *A E* tangente [b]; il che dovea eseguirsi.

a 4. I.

b 16. III.

PROPOSIZIONE XVIII.

FIG. 80. *Se la retta* A E *tocca il cerchio* A B F, *condotta dal centro* C *al contatto* A *la retta* C A, *farà con essa tangente angolo retto*.

SE nò, si conduca la *C D* perpendicolare ad essa tangente; sarà dunque *A C* maggiore di *C D* [c]; ma *C B* uguaglia *C A*; dunque sarebbe la parte *C B* del tutto *C D* maggiore; il che è assurdo [d].

c 19. I.

d Assiom. 6.

PRO-

(a) Circoli concentrici diconsi quelli, che sono descritti intorno al medesimo centro, ovvero che sono compresi da circonferenze descritte da varj punti dell' istessa retta, che rivolgesi intorno ad un suo punto immobile, come centro.

PROPOSIZIONE XIX.

Toccandosi il cerchio in A *dalla retta* A E, *se dal contatto* A *si alza la perpendicolare* A H *ad essa tangente, passerà per lo centro* C *del Cerchio.*

ALtrimenti se fosse il centro in *G* fuori della retta *AH*, congiunta *GA* sarebbe ancor essa angolo retto con *AE* [a]; dunque gli angoli *GAE*, *CAE* sarebbero uguali [b], ed il tutto riuscirebbe uguale alla parte; il che è impossibile [c].

a 18. III.
b *Assiom.* 7.
c *Assiom.* 6.

PROPOSIZIONE XX.

FIG. 81.

Se da' termini dell' arco A B *si conducano due raggi al centro* C, *e due linee a qualche punto* D, E, F *della circonferenza opposta a detto arco, sarà l' angolo* A C B *duplo di qualsivoglia di detti angoli* A D B, A E B, A F B.

NEl triangolo *CEB* fatto dal raggio *AC* prolungato in *E* sono gli angoli *AEB*, e *CBE* uguali [d]: ma l' angolo esterno *ACB* è uguale ad ambidue gl' interni opposti *AEB*, *CBE* [e]; dunque *ACB* è duplo di *AEB*. Quanto all' angolo *ADB* fatto sotto l' altro *AEB*, congiunta la retta *DC*, e prolungata in *G*, sarà l' angolo *GCB* uguale a' due interni tra di loro uguali *CDB*, *CBD* [e], e però è duplo *GCB* di *CDB*; similmente l' angolo *GCA* sarà duplo di *CDA*, uguagliando ancor esso gli due interni tra di loro uguali *CDA*, *CAD* [e]; dunque il rimanente *ACB* è duplo del rimanente *ADB*. Se poi l' angolo *AFB* è al di sopra, di maniera che la retta *FC* prolungata in *H*

d 5. I.
e 32. I.

in *H* seghi l'angolo centrale *ACB*, tanto sarà l'esterno *ACH* duplo dell'interno *AFC*, quanto il rimanente *HCB* duplo di *CFB*; dunque tutto l'angolo *ACB* sarà pure il doppio dell'angolo intiero *AFB*; il che ec.

PROPOSIZIONE XXI.

Gli angoli ADB, AEB, AFB *insistenti al medesimo arco, e disposti nello stesso segmento sono tra di loro uguali.*

IMperocchè ciascuno di essi è la metà dell'angolo fatto al centro *ACB* a; dunque riescono tra di loro uguali.

a 20. III.

PROPOSIZIONE XXII.

FIG. 82.

Ogni quadrilatero ABCD *inscritto in un circolo ha gli angoli opposti uguali a due retti.*

SI conducano le diagonali *AC*, *BD*. Sarà l'angolo *ABD* uguale all'angolo *ACD* b, e l'angolo *DBC* uguale all'angolo *DAC*, dunque tutto l'angolo *ABC* uguaglia li due *DCA*, *DAC*; ed aggiunto di quà, e di là l'angolo *ADC*, sono li due angoli opposti *ABC* *ADC* del detto quadrilatero uguali a tutti tre gli angoli del triangolo *ADC*, i quali sono uguali a due (a) retti c. Il che era da dimostrarsi.

b 21. III.

c 32. I.

PRO-

(a) Parimente l'angolo ABD=ACD, e l'altro ACB=ADB (P. 21. III.).

Dunque tutto l'angolo DCB=ABD+ADB.

Ag-

PROPOSIZIONE XXIII.

Sopra la stessa retta AC *non possono essere descritti verso la medesima parte due segmenti simili, e disuguali* ADC, ABC (a)

FIG. 83.

MErcecchè condotta da un termine *C* la retta *CBD*, segante le due circonferenze in *B*, *D*, e congiunte all' altro termine *A* le rette *BA*, *DA* (b), se fossero i segmenti simili, sarebbero gli angoli *ADC*, *ABC* uguali [a]; il che è impossibile, essendo l' uno esterno, l' altro interno opposto del triangolo *ADB* [b]; dunque non possono tali segmenti essere simili (c).

a Defin. 9.

b 16. 1.

PRO-

° Aggiungasi di comune all' uno, e agli altri l' angolo DAB; ne segue, che DCB + DAB = ABD + ADB + DAB; ma questi tre sono uguali a due retti per la Prop. 32. I; dunque anche que' due opposti del quadrilatero saranno uguali a due retti.

Quindi producendosi uno de' lati di esso quadrilatero, l' angolo esterno, che ne risulta, sarà sempre uguale all' interno opposto di detto quadrilatero.

(a) Con più chiarezza può enunciarsi così: data la retta AC, e descritti sopra di essa i due segmenti disuguali ADC, ABC verso la medesima parte, non potranno questi essere simili.

(b) Allora sarebbero simili i segmenti ADC, ABC, qualora gli angoli ADC, ABC fatti dalle rette tirate da un punto dell' arco a' termini della corda fossero uguali (Def. 9. di questo Libro). Ma l' angolo ABC è maggiore dell' altro ADB, o ADC (Prop. 16. I.;) dunque essendo disuguali questi angoli, non potranno quei segmenti esser simili, ove tali angoli si ritrovano.

(c) Descritti sopra la medesima corda due segmenti, che sieno simili, non possono non essere uguali; e verso due differenti parti.

PROPOSIZIONE XXIV.

FIG. 84. *Simili porzioni di cerchj* ADC, BEF *descritte sopra linee uguali tra di loro* AC, BF, *sono porzioni uguali* (a).

ALtrimenti sopraponendosi l'una all'altra, adattandosi la base *AC* all'altra uguale *BF*, riuscirebbero sopra la stessa linea descritti due segmenti simili, e disuguali, il che è impossibile a, dunque è necessario, che dette porzioni sieno uguali.

a 23. III.

PROPOSIZIONE XXV. PROBL.

FIG. 85. *Data una porzione di cerchio* EAF, *trovarne il centro* C, *per poterne compire tutto il circolo.*

DIvisa la corda *EF* pel mezzo in *D*, le si conduca la perpendicolare *DH*; e tirata un' altra qualsivoglia retta *EA*, dentro la stessa porzione, dividasi per mezzo in *B*, e le si conduca la perpendicolare *BC* concorrente in *C* con l' al-

(a) Posti i segmenti ADC, BEF simili, e date ancora uguali le linee AC, BF, sopra cui son descritti, saranno essi segmenti uguali.

Sopraposti i due segmenti l'uno all'altro, adattandosi la base AC sopra l'altra uguale BF, cioè il punto A sul punto B, e 'l punto C sull'altro F, ne risulterà una sola linea: onde anche l'arco circolare ADC dovrà combaciare sopra l'arco BEF, per essersi supposti tali segmenti fra loro simili: e perciò fatta l'ipotesi, che tutto il segmento primo non combaciasse, e conseguentemente non fosse uguale al secondo, ne seguirebbe, che sopra la stessa linea riuscirebbero descritti due segmenti simili insieme, e disuguali; lo che è assurdo (Prop. 23. III.); dunque è necessario, che detti segmenti si uguaglino.

altra *DH*. Dico essere *C* il centro ricercato, di maniera che congiunta *CE*, si potrà con questo raggio compirne il cerchio *EAH*, dovendo esserne il centro di questo circolo in qualunque di dette perpendicolari seganti per mezzo esse corde *EF*, *EA* [a], e però nel loro concorso *C*; il che ec.

a Caroll. Prop. 1. III.

PROPOSIZIONE XXVI.

FIG. 86.

Ne' cerchj uguali ABD, EFH *gli angoli uguali fatti al centro* ACB, EGF, *o fatti alla circonferenza* ADB, EHF *insistono ad archi uguali* AB, EF.

SI conducano le corde *AB*, *EF*; queste saranno uguali, essendo basi di due triangoli *ACB*, *EGF*, che intorno gli angoli uguali *C*, *G* hanno i lati uguali *CA*, *GE*, e *CB*, *GF* [b]; dunque essendo le rette *AB*, *EF* uguali, ed i segmenti *ADB*, *EHF* simili per l' uguaglianza degli angoli in essi contenuti [c], onde sono porzioni di cerchio uguali [d]; però ancora i rimanenti archi *AB*, *EF* sono uguali; il che ec.

b 4. I.

c Defin. 9.

d 24. III.

PROPOSIZIONE XXVII.

Ne' cerchj uguali gli angoli fatti sopra archi uguali AB, EF *al centro, o alla circonferenza saranno uguali*.

IMperocchè se non fosse l' angolo *ACB* uguale ad *EGF*, supponghasi uguale ad *EGI*; dunque sarebbe l' arco *AB* uguale ad *EI* [e], e non ad *EF*, contro l' ipotesi; pertanto sono uguali gli angoli *ACB*, *EGF* al centro, e così ancora gli altri

e 26. III.

a 20. I. e però maggiore di *B e* [a], cioè dell'altro raggio *e A*; e così la parte *e D* maggiore del tutto *e A*;
b *Assiom.* 3. il che è impossibile [b]. Dunque il vero centro del cerchio maggiore era *E*, che connesso con *C* centro del minore manda la linea *E C* al contatto *B*; il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE XII.

FIG. 74. *Ancora toccandosi due cerchj per di fuori in* B, *la retta, che congiunge i loro centri* E, C *passerà pel contatto* B.

IMperocchè se non fosse *E* il centro d'uno di essi cerchi, ma un altro punto *e*, sicchè congiunta la *e C* segasse le periferie in *A*, *D*, tirata la *e B* sarebbe essa *e B* con *B C* uguale agli altri due raggi *e A*, e *C D*, e però que' due lati *e B*, *B C* riuscirebbero minori del terzo *C e*; il che è im-
c 20. I. possibile [c]; dunque il centro debbe essere in *E* nella retta *E C*, che passa pel contatto *B*; il che ec.

PROPOSIZIONE XIII.

FIG. 75. *Due cerchj, che si tocchino dentro, o, fuori, avranno il loro contatto in un sol punto* B.

SI congiungano i loro centri *E*, *C* colla retta *C E*,
d 12. III. che passerà pel contatto *B* [d], ma se si toccassero in altro punto *D*, si congiunga ancora la *C D*. Perchè dunque la *C B* passa pel centro *E* dell'altro cerchio maggiore, sarà *C B* la minima di quelle, che dal punto *C* si conducono alla pe-
e 8. III. riferia del detto cerchio, il cui centro *E* [e]; dunque non sarebbe *C D* uguale a *C B*, e però non

sa-

farebbero amendue raggi del cerchio, il cui centro C; e però non si toccano essi cerchi in altro punto, che in B (a).

PROPOSIZIONE XIV.

Nel cerchio le rette AC, BD *se sono uguali, saranno ugualmente distanti, dal centro* E; *e se sono da esso egualmente distanti, sono tra di loro uguali.*

FIG. 76.

Tirate le perpendicolari EF; EG sopra di esse dal centro E, saranno divise pel mezzo le rette AC, BD [a], onde sarà AF uguale a BG, se tutta l'AG era uguale a tutta la BD; e congiunti i raggi EA, EB, i cui quadrati sono uguali, saranno altresì i quadrati AF, ed FE uguali a' quadrati BG, EG, perchè uguagliano i quadrati de' raggi opposti agli angoli retti F, G [b]; dunque essendo uguali i quadrati AF, BG, debbono essere uguali i rimanenti quadrati EF, EG [c], e però ancora esse perpendicolari sono uguali, onde le rette uguali AC, BD sono ugualmente distanti dal centro E [d]. Viceversa le rette, che saranno ugualmente distanti dal centro, dovranno essere uguali, perchè i due quadrati AF, FE uguagliando

a 3. III.

b 47. I.

c Assiom. 2.

d Defin. 3.

(a) Che se poi i due cerchj si toccheranno interiormente, il loro contatto sarà in un solo punto b. Poichè se si toccassero ne' due punti b, d, congiunta la de, le due eb, ed sono uguali (e per l' Ipot., e per la Def. 14. I.); aggiungasi la eE di comune, saranno le due linee de, $cE = bE$, e per conseguenza uguali anche a dE: il che è assurdo, perchè due lati del triangolo farebbero uguali al terzo contro la Prop. 20. Dunque non potevano i due cerchj, che toccansi interiormente, toccarsi se non se nel solo punto b; il che ec.

gliando gli altri due *B G*, *G E*, essendo tanto questi, che quelli uguali al quadrato del raggio; però siccome il quadrato *E F* uguaglierà il quadrato *E G*, ancora i quadrati rimanenti *A F*, *B G* saranno uguali; ed essendo *A F*, *B G* la metà delle rette *AC*, *B D*[a], ancora le intere *AC*, *BD* riescono uguali; il che ec.

a 3. III.

PROPOSIZIONE XV.

FIG. 77.

Delle rette inscritte in un circolo la massima è il diametro, e dell' altre la più vicina IK *al centro* E *è maggiore della più lontana* AC.

Tirate dal centro sopra le rette *AC*, *IK* le perpendicolari *E F*, *E H* si prolunghi questa in *G*, sicchè sia *E G* uguale ad *E F*, e si tiri la *B G D* parallela ad *I K*, cui parimente sarà perpendicolare la *E G*; onde *DB* riuscirà uguale ad *AC*[b]: ma, congiunti i raggi *E I*, *E K*, *E D*, *E B*, essendo gli due lati *IE*, *K E* uguali a' due *B E*, *D E*, ma l' angolo *I E K* maggiore di *B E D*; dunque la base *IK* è maggiore dell' altra *BD*[c], e però è maggiore la più vicina al centro della più lontana *AC*, che uguaglia *B D*; ed il diametro è vicino più di tutti al centro; dunque è maggiore di qualunque altra retta non condotta pel centro, e però è la massima di tutte, uguagliando sempre i due raggi, come *E I*, *E K*, i quali sono maggiori della base *IK*[d]; onde è manifesto ciò, che dovea provarsi.

b 14. III.

c 24. I.

d 20. I.

PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 78.

La retta E A D *tirata dal termine* A *del diametro*

mero A H *perpendicolare ad esso, sarà tangente del cerchio* A B, *rimanendo tutta negli altri punti esteriore alla circonferenza: nè potrà inserirsi veruna linea retta* L A *tra la stessa tangente* A E, *e la circonferenza; e però l' angolo del semicircolo* G A B, *o* C A, *sarà maggiore di qualsivoglia angolo acuto* L A H; *e l' angolo del contatto* F A E *è minore di qualsivoglia piccolo angolo rettilineo* L A E.

Tirata dal centro *C* a qualunque altro punto *D* della retta *EAD*, che nel punto *A* conviene colla circonferenza, la retta *CD*, questa opposta all' angolo retto *CAD* sarà maggiore del raggio *CA* opposto all' angolo acuto *CDA* [a], e però è maggiore del raggio *CB*; dunque il punto *D* è di là dalla circonferenza; e così qualunque altro punto di essa linea *EAD* rimane fuori del cerchio, che però solamente in esso punto *A* resta toccato dalla retta *EAD*. Che poi non possa tra la circonferenza, e la tangente inserirsi al contatto *A* veruna retta *LA*, è manifesto, perchè condotta dal centro *C* la perpendicolare *CG* sopra essa *LA*, sarà *CG* minore di *CA*, come opposta quella ad angolo minore del retto *CGA*, cui si oppone questa [a]; dunque il punto *G* della retta *LA* essendo più vicino del raggio al centro *C*, sarà dentro esso cerchio; e però la retta *LA* sega il circolo, non resta interposta fra la circonferenza, e la tangente; onde l' angolo del semicircolo eccede qualunque angolo acuto *LAC*, e l' angolo del contatto è minore di qualsivoglia piccolissimo angolo *EAL*; il che era da dimostrarsi.

a 19. 1.

PRO-

golo *AFB* con i due quadrati *DF*, *CD*, cioè col quadrato *CF* [a], uguale a' due quadrati *DB*, e *CD*, cioè al quadrato del raggio *CB* [a]; o dell' altro raggio *CE*; e questo pure essendo uguale a' quadrati *EH*, *CH* [a], come al rettangolo *EFG* col quadrato *FH* [b], e col quadrato *CH*, che è quanto dire al rettangolo *EFG* col quadrato *CF* [a]; sarà dunque il rettangolo *AFB* col quadrato *CF* uguale al rettangolo *EFG* col medesimo quadrato *CF*; onde tolto di quà, e di là questo quadrato *CF*, rimane il rettangolo *AFB* uguale all'altro *EFG*. Il che ec.

a 47. I.
b 5. II. e 3. III.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Da un punto F *fuori del cerchio tirata la tangente* FH, *ed una segante* FBA, *sarà il quadrato della tangente* FH *uguale al rettangolo* AFB *di tutta la segante, e della sua parte esteriore.*

Condotta dal centro *C* la perpendicolare *CD* sopra la segante, che dividerà pel mezzo la parte interna *AB* [c], e congiunti i raggi *CB*, *CH*; essendo il quadrato *FD* uguale al rettangolo *AFB* col quadrato *BD* [d], aggiuntovi il quadrato *CD*, saranno i due quadrati *FD*, *CD*, cioè il quadrato *CF*, o i due quadrati *FH*, *CH* [e] (essendo l' angolo *CHF* retto [f]) uguali al rettangolo *AFB*, co' quadrati *BD*, e *CD*, cioè col quadrato del raggio *CB*: essendo adunque il quadrato della tangente *FH* col quadrato del raggio *CH* uguale al rettangolo *AFB* col quadrato del raggio *CB*, tolti gli uguali quadrati di detti raggi, rimane il quadrato *FH* della tangente uguale al rettangolo *AFB*

c 3. III.
d 6. II.
e 47. I.
f 18. III.

di

di tutta la ſegante FA nella parte eſterna FB; il che ec.

COROLLARIO I. Quindi ſe da un medeſimo punto F ſi tireranno due tangenti FH, FI al medeſimo circolo, queſte ſaranno uguali, eſſendo ciaſcheduno di tali quadrati uguale al medeſimo rettangolo AFB della ſegante condotta dallo ſteſſo punto F.

COROLLARIO II. E ſe più ſeganti FBA, FGE ſi conducano da un punto F allo ſteſſo cerchio, ſaranno i loro rettangoli AFB, EFG tra di loro uguali, eſſendo ciaſcheduno di eſſi uguale al quadrato della tangente FH.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Se il rettangolo di una ſegante AFB *ſarà uguale al quadrato della retta* FI, *che condotta dallo ſteſſo punto* F, *ſi accoſti alla periferia del cerchio, ſarà queſta* FI *tangente di eſſo.*

IMperocchè tirata la tangente FH, il cui quadrato uguaglia pure il rettangolo AFB a, e a 36. III. però ancora è uguale al quadraro FI, e conſeguentemente ſaranno le rette FH, FI uguali: e condotti i raggi CH, CI ſono pure uguali; e congiunta al centro la retta FC, è queſta lato comune a' due triangoli FHC, FIC; dunque l'angolo FIC uguaglia l'angolo FHC b; il quale è b 8. I. retto c; pertanto eſſendo pure l'angolo FIC retto, queſta FI ſarà tangente d. Il che dovea dimoſtrarſi. c 18. III. d 16. III.

ELE-

ELEMENTI DELLA GEOMETRIA DI EUCLIDE

LIBRO IV. (a)

DEFINIZIONI.

I. DIcesi INSCRITTA nel circolo una figura rettilinea, quando ciascun' angolo di essa tocca la circonferenza (b).

II. Ed allora il cerchio dicesi CIRCOSCRITTO ad essa figura rettilinea.

III. CIRCOSCRITTA poi al cerchio dicesi la figura

(a) Avendo Euclide nel Libro III. dimostrate le principali proprietà del cerchio, ci addita in questo Libro IV., che è tutto Problematico, la maniera d' inscrivere nel cerchio, e di circoscrivere ad esso de' Poligoni regolari: lo che è d' una grandissima utilità all' Architettura militare, e civile, ed alla Agrimensura. *Regolare* addimandasi quel Poligono, in cui sono tutti i lati, e tutti gli angoli uguali; e prende esso il nome dal numero degli angoli, come, per tralasciare il triangolo, ed il quadrato, *Pentagono* dicesi quello di cinque, *essagono* di sei, *decagono* di dieci angoli formato. Qualora poi sia il poligono inscritto nel cerchio, o al medesimo circoscritto, le linee rette, che si conducono dal centro agli angoli di esso poligono chiamansi *raggi*, come le rette CE, CG della Fig. 96. Tav. V.; oppure le altre CA, CD, CB della Fig. 97: quelle poi, che si tirano dal centro perpendicolari sopra i lati del poligono, diconsi *perpendicolari*, ovvero *cateti*, come nella Fig. 96. le rette CD, CB, CA, e nella Fig. 97. le rette CE, CF si chiamano *perpendicolari* del triangolo circoscritto, o inscritto.

(b) Così il triangolo BAD nella

gura rettilinea, se ciascun lato di essa tocca la di lui circonferenza (a).

IV. Ed in tal caso dicesi il cerchio INSCRITTO in detta rettilinea figura.

PROPOSIZIONE I. PROBL.

In un dato cerchio, il cui diametro AB, *inscrivere una linea* AD (b) *uguale ad una data* F, *non maggiore di esso diametro.*

Tav. 5. FIG. 93.

COl centro *A*, e l'intervallo *AE* uguale ad *F* descrivasi un altro cerchio, che seghi in *D* quello già dato: è chiaro, che congiunta *AD* sarà uguale al raggio *AE* e però alla data *F*. Il che dovea farsi.

PROPOSIZIONE II. PROBL. (c)

Nel dato cerchio inscrivere un triangolo ABD *equiangolo ad un altro dato* IGH.

FIG. 94.

SI tiri al cerchio in qualche punto *A* la tangente *EAF* [a], e si faccia l'angolo *FAD* uguale all'angolo *IGH*, e l'angolo *EAB* uguale all'altro *IHG*, e congiunganſi i punti *D*, *B*, in cui queste rette segano il cerchio, con la retta *DB*. Dico

a 17. III.

nella Fig. 94. dicesi *inscritto* nel cerchio, perchè ciascuno degli angoli di esso triangolo tocca la circonferenza ne' punti B, A, D; onde il cerchio in tal caso chiamasi *circoscritto* ad essa figura triangolare.

(a) Il triangolo FEG nella Fig. 95. dicesi *circoscritto* al cerchio; perchè ciascun lato del triangolo tocca la di lui circonferenza ne' punti B, D, A.

(b) Quando una linea retta nel cerchio tocca, o sega colle sue estremità la circonferenza, essa retta dicesi *applicata* nel cerchio.

(c) Questa, e l'altre tre seguenti Proposizioni diconsi ritrovate da Talete.

a Prop. 20. III. *ADB*, *EHF* fatti alla circonferenza [a], di cui sono dupli quegli altri fatti al centro. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Le rette uguali AB, EF *in cerchj uguali ne segano archi uguali, il maggiore* ADB *al maggiore* EHF, *ed il minore* AB *al minore* EF.

FAtti al centro gli angoli *ACB*, *EGF* saranno uguali, essendo i lati, e le basi uguali in tali triangoli [b]; dunque l'arco *AB* sarà all'altro *EF* uguale [c]; e però ancora il rimanente *ADB* al residuo *EHF*; il che ec.

b 8. I.
c 26. III.

PROPOSIZIONE XXIX.

Ne' cerchj uguali sono gli archi uguali segati da corde uguali.

ESsendo gli archi *AB*, *EF* uguali, ancora gli angoli al centro *ACB*, *EGF* saranno uguali [d]; dunque per essere ancora uguali i lati di detti triangoli, le basi pure *AB*, *EF* sono uguali; il che ec.

d 27. III.

PROPOSIZIONE XXX. PROBL.

FIG. 87. *Dato un arco circolare* AEB, *dividerlo pel mezzo.*

SI divida la corda *AB* pel mezzo in *D*, e vi si alzi la perpendicolare *DE*; dico, che questa segherà l' arco pel mezzo in *E*; perchè giunte le rette *AE*, *BE* saranno le basi uguali de' triangoli *ADE*, *BDE*, in cui il lato *DE* è comune, ed i lati *AD*, *BD* sono uguali intorno ad angoli retti [e]:

e 4. I.

ma

ma le rette uguali in cerchj uguali, e però ancora nel medesimo cerchio corrispondono ad archi uguali [a]; dunque sono uguali gli archi AE, BE, ne' quali è diviso l' arco dato AEB dalla retta DE. Il che ec.

a 28. III.

PROPOSIZIONE XXXI.

FIG. 88.

L' angolo ADB *fatto nel semicircolo* BEA *è retto; l' angolo* BAD *fatto nel maggiore segmento* BFAD *è acuto; e l' angolo* BED *fatto nel segmento minore sarà ottuso.*

Congiunta al centro la retta DC, e prolungata all' altra parte del circolo in F, essendo tanto l' angolo ACF duplo di ADF, che l' angolo FCB duplo di FDB [b], saranno gli angoli ACF, FCB dupli dell' angolo ADB: ma que' due sono uguali a due retti [c]; dunque quest' angolo fatto nel semicircolo è retto; però nel triangolo ADB l' angolo A, che è descritto nel segmento maggiore $BFAD$ è acuto, essendo l' altro ADB retto [d]; e perchè nel quadrilatero $BEDA$ i due angoli opposti BAD, BED sono uguali a due retti [e], essendo BAD acuto, l' altro BED nel segmento minore sarà ottuso. Il che ec. (a)

b 20. III.
c 13. I.
d 17.
e 22. III.

G 2 PRO-

(a) Quindi ne segue la soluzione d' un Problema, qual' è, di dividere l' angolo del semicerchio in maniera, che una parte di esso sia uguale ad uno degli angoli del triangolo, in cui trovasi il predetto angolo del semicerchio, e l' altra rimanente parte all' angolo rimanente di detto triangolo. L' angolo CDA può dimostrarsi facilmente uguale all' angolo DAB, e l' angolo DBC uguale all' angolo DBA.

PROPOSIZIONE XXXII.

FIG. 89.

Se nello stesso punto B *della circonferenza la retta* GH *tocca il cerchio, e la* BD *lo sega; l'angolo della tangente, e della segante uguaglia quello, che si descriverebbe nell' alterno segmento, cioè* DBH *è uguale all' angolo* BAD, *e* DBG *uguale a* BED.

SI conduca pel centro *C* dal contatto la linea *BCA*, e congiungasi *AD*; sarà l'angolo *CBH* retto [a], ed essendo ancora retto nel semicircolo l'angolo *ADB* [b], gli altri due *ABD*, *BAD* saranno uguali pure ad un retto [c], e però uguali a' due *ABD*, *DBH*; dunque tolto di comune *ABD*, rimane l'angolo *BAD* uguale a *DBH*; e perchè l'angolo *BED* con l' opposto *BAD* del quadrilatero *ADEB* uguaglia due retti [d], come ancora *DBH* con *DBG* compisce due retti [e], sarà l'angolo *BED* uguale a *DBG*. Il che ec.

a 18. III.
b 31. III.
c 32. I.
d 22. III.
e 13. I.

PROPOSIZIONE XXXIII. PROBL.

FIG. 90.

Sopra una data retta BD *descrivere una porzione di circolo capace di un angolo uguale al dato angolo* F.

SI faccia l'angolo *DBH* uguale ad *F* [f], e divisa *BD* pel mezzo in *E*, si alzi *EC* perpendicolare ad essa, e dal punto *B* si tiri pure *BA* perpendicolare a *BH*; e convenendo queste due perpendicolari nel punto *C*, col raggio *CB* descrivasi un cerchio, che passerà ancora per *D*, es-

f 23. I.

essendo congiunta la CD uguale a CB, per essere basi de' triangoli rettangoli CED, CEB; ne' quali il lato EC è comune, ed i lati ED, EB uguali; e sarà esso circolo toccato dalla BH [a], però l'angolo DAB fatto nel segmento, che riesce sopra la data retta BD, sarà uguale all'angolo DBH [b], cioè al dato angolo F, per la costruzione. Il che ec.

a 16. III.

b 32. III.

PROPOSIZIONE XXXIV. PROBL.

Da un dato cerchio tagliare una porzione capace dell'angolo uguale al dato F.

SI tiri la retta BH, che tocchi in B il dato cerchio, e si faccia l'angolo HBD uguale al dato F; è manifesto, che la porzione BAD sarà capace dell'angolo dato [c]. Il che ec.

c 33. III.

PROPOSIZIONE XXXV.

Se dentro al cerchio AGE *due rette* AB, EG *si segano in* F, *il rettangolo delle parti dell'una uguaglia quello delle parti dell'altra; cioè* AFB *è uguale ad* EFG.

FIG. 91.

SE si segassero nel centro, sarebbe ciò manifesto, essendo le parti di tali linee tanti raggi uguali del medesimo cerchio; ma essendo il loro concorso F diverso dal centro C, si tirino da esso centro C le perpendicolari CD, CH sopra dette linee, che da queste saranno segate pel mezzo [d], e si congiungano CF, CE, CB. Il rettangolo AFB col quadrato DF sarà uguale al quadrato DB [e]; ed aggiunto il quadrato CD, sarà il rettan-

d 3. III.

e 5. II.

golo

PROPOSIZIONE VIII. PROBL.

In un dato quadrato FGHI *inscrivere un cerchio*.

DIvidansi pel mezzo i lati ne' punti *A*, *E*, *B*, *D*, e condotte le rette *AB*, *ED*, che si segheranno in *C*, e saranno parallele a' detti lati, congiungendo i termini di linee parallele, ed uguali [a]; però tutte le rette *CA*, *CE*, *CB*, *CD*, uguagliando la metà de' lati di esso quadrato, saranno uguali fra loro; onde col centro *C*, e con uno di questi raggi *CA* descritto un cerchio, passerà per gli altri punti *E*, *B*, *D*, e rimarrà toccato da' lati di esso quadrato, essendo qualunque angolo *BAI*, *CEH* ec. retto, come uguale all'angolo *I*, ovvero *G* opposto nel parallelogrammo *ABHI*, *DEHG* ec. [b]. Dunque detto circolo riesce inscritto nel dato quadrato; il che ec.

a 33. 1.

b 34. 1.

PROPOSIZIONE IX. PROBL.

FIG. 98.

Ad un dato quadrato AEBD *circoscrivere un cerchio*.

SI tirino le diagonali *AB*, *DE* concorrenti in *C*, e perchè qualunque triangolo *AEB*, *EBD*, *BDA*,

e di circoscrivere al cerchio un Ottagono, con dividere pel mezzo qualunque arco AE, EB, BD, DA per la Proposizione 30. del Libro III., e congiungere per la Proposizione I. di questo Libro il punto A col punto medio dell' arco AE; e così facendo negli altri archi, resterà inscritto nel cerchio l'Ottagono equilatero, ed equiangolo. Sarà poi circoscritto al cerchio l' Ottagono, qualora, condotti due altri diametri, che congiungano colle loro estremità i punti medj degli archi istessi, si tirino tante perpendicolari a' diametri, quanti sono i punti estremi de' diametri medesimi.

BDA, *DAE* è isoscele per l'uguaglianza de' lati del quadrato, tutti gli angoli *BAE*, *EBA* sono uguali [a] tra loro, e sono semiretti, essendo retto l'angolo *AEB*, e gli altri due uguali ad un altro retto [b]; dunque tutti gli angoli semiretti *CAE*, *CEA*, *CEB*, *CBE*, *CBD*, *CDB*, *CDA*, *CAD*, essendo uguali le rette *CA*, *CE*, *CB*, *CD* pure sono uguali [c]; e però fatto centro *C*, con l'intervallo *CA* descritto un cerchio passerà per tutti gli altri punti *E*, *B*, *D*; onde sarà questo il cerchio, che dovea circoscriversi al dato quadrato.

a 5. I.
b 32. I.
c 6. I.

PROPOSIZIONE X. PROBL.

Costruire il triangolo isoscele ABE, *li cui angoli alla base* AEB, ABE *sieno ciascuno il doppio dell'angolo alla cima* BAE.

FIG. 100.

Dividasi una retta *AB* in *D*, in maniera che il rettangolo *ABD* uguagli il quadrato *AD* [d], e col raggio *AB* descritto un circolo *BEF*, si adatti dal punto *B* alla circonferenza una retta *BE* uguale all' *AD*, e si congiunga *AE*; sarà il triangolo *ABE* isoscele per l'uguaglianza de' raggi; ed aggiunta la retta *ED*, circoscritto un cerchio al triangolo *ADE*, sarà la *BE* tangente, per essere il di lei quadrato, come quello di *AD*, uguale al rettangolo *ABD* [e]; e però l' angolo *DEB* sarà uguale all' angolo *EAD* [f]; dunque aggiunto di quà, e di là l'angolo *DEA*, sarà l' angolo *AEB* uguale a' due angoli *EAD*, *DEA* cioè all'angolo esterno *BDE* [g]; ma ancora l'angolo *ABE* uguaglia l' angolo *AEB* [h]; dunque gli angoli *BDE*, *ABE*

d 11. II.
e 37. III.
f 32. III.
g 32. I.
h 5. I.

ABE sono uguali, e però il lato DE uguaglia il lato EB [a], cioè il lato AD: dunque ancora l'angolo DEA uguaglia l'angolo EAD [b]; e però sarà l'angolo AEB duplo dell'angolo EAB. Il che ec. (a).

a 6. I.
b 5. I.

PROPOSIZIONE XI. PROBL.

FIG. 101.

In un dato cerchio inscrivere un Pentagono DFGHI *equilatero, ed equiangolo.*

Fatto un triangolo isoscele ABE, di cui ciascheduno angolo sopra la base sia il doppio dell'angolo A alla cima [c], si inscriva nel cerchio il triangolo DGH equiangolo allo stesso ABE [d]: poi divisi pel mezzo ambi gli angoli alla base DGH, e DHG colle linee GI, HF [e]; si congiungano le rette GF, FD, DI, IH. Dico, che questo sarà un Pentagono equilatero, ed equiangolo inscritto nel dato circolo; imperocchè gli angoli alla base HG di quel triangolo DHG equiangolo ad ABE essendo il doppio dell'angolo GDH, divisi quelli pel mezzo, ne riusciranno tutti i cinque angoli DGI, IGH, GHF, FHD, GDH, uguali,

c 10. IV.
d 2. IV.
e 9. I.

(a) Tutti e tre gli angoli del triangolo essendo uguali a 180. gradi, come si ha dalla Proposizione XXXII. del Libro I., è manifesto, che per sapere la precisa quantità di ciascheduno degli angoli esistenti sopra la base del triangolo isoscele ABC, fa d'uopo il dividere primieramente tutta quella somma di gradi 180, in cinque uguali parti; secondariamente due di queste parti bisogna assegnarle a ciascun' angolo alla base, dovendo ognuno di essi essere duplo dell'angolo al vertice. Essendo pertanto il 36. una quinta parte del 180., è chiaro, che ciascheduno degli angoli esistenti sulla base sarà gradi 72: e con ciò si viene a determinare anche l'angolo al vertice, il quale non potrà essere nè maggiore, nè minore di gradi 36.

uguali, e però gli archi sopra di cui essi angoli insistono, saranno uguali [a], e però ancora le rette a detti archi sottotese *DI*, *IH*, *HG*, *GF*, *FD* sono uguali; onde questo Pentagono è equilatero; ed essendo l'arco *DI* uguale ad *FG*, aggiunto di comune l'arco *IHG*, sarà l'arco *DIHG* uguale all'arco *IHGF*; e però l'angolo *DFG* è uguale all'angolo *FDI* [b], e così degli altri; dunque esso Pentagono è ancora equiangolo (*a*), il che ec.

a 26. III.

b 27. III.

PROPOSIZIONE XII. PROBL.

Ad un dato cerchio IFH *circoscrivere un Pentagono* ABEKL *equilatero, ed equiangolo.*

FIG. 102.

SI inscriva nel cerchio il pentagono *IDFGH per l'antecedente*, e dal centro *C* condotti a qualunque angolo i raggi *CI*, *CD*, *CF* ec. si tirino a' medesimi le perpendicolari *AB*, *BE*, *EK*, *KL*, *LA*, che saranno tangenti del circolo. Dico essere il poligono da esse compreso un pentagono equilatero, ed equiangolo circoscritto al cerchio. Imperocchè essendo *AI*, *AH* tangenti, saranno uguali [c], ed essendo uguali i raggi

c Corell. 1. Pr. 36. III.

(*a*) Di quì ne segue, che siccome gli angoli retti del pentagono ascendono alla somma di sei pel Corollario VI. della Proposizione XXXII. del Libro I., saranno essi uguali a 540. gradi; onde ciascuno de' cinque angoli di esso pentagono equilatero, ed equiangolo uguaglierà gradi 108.

Parimente da questa medesima Proposizione si ha la maniera d'inscrivere in un cerchio un decagono equilatero ed equiangolo, con dividere pel mezzo ciascuno degli archi del pentagono DFGHI, e con applicare due rette, che si partano dal punto medio di qualunque arco, e terminino alle estremità di ciascuno di essi archi.

raggi CI, CH, e retti gli angoli CIA, CHA, congiunta la CA, sarà l' angolo ACI uguale ad ACH, ed IAC uguale ad HAC [a]; dunque congiunta ancora CB, si proverà similmente l' angolo BCD uguale a BCI, e l' angolo DBC uguale ad' IBC; pertanto ACI è la metà di HCI, ed IAC la metà di IAH, e parimente BCI è la metà di ICD, ed IBC la metà di IBD; onde essendo l' angolo HCI uguale ad ICD per l'uguaglianza de' lati HI, ID [b], sarà l'angolo ACI uguale a BCI, ed essendo di quà, e di là dal punto I gli angoli retti, e comune il lato IC a' triangoli ACI, BCI, gli altri lati, e gli altri angoli saranno uguali [c]; però AI essendo uguale ad IB, il lato AB è duplo di AI; similmente si proverà il lato AL essere duplo di AH; dunque essendo AI uguale ad AH, ancora AB sarà uguale ad AL; e così tutti i lati si proveranno uguali, ed essendo l' angolo CBI uguale a CAI, anche i loro doppj DBI, ed HAI saranno uguali, e così tutti gli altri angoli di questo pentagono, il quale sarà equilatero, ed equiangolo, circoscritto al dato cerchio, come dovea farsi.

a 4. I.
b 28. III.
c 26. I.

CoROLLARIO. Nella stessa maniera qualunque figura equilatera, ed equiangola sia inscritta nel cerchio, tirate da qualsivoglia angolo le tangenti, si proverà essere similmente la figura circoscritta equilatera, ed equiangola.

PROPOSIZIONE XIII. PROBL.

In un dato Pentagono equilatero, ed equiangolo ABEKL *inscrivere un circolo.*

Si

SI dividano pel mezzo due angoli proſſimi *LAB*, *ABE* [a] colle rette *AC*, *BC* concorrenti in *C*, e da eſſo punto *C* ſi tirino ſopra ciaſchedun lato le perpendicolari *CH*, *CI*, *CD*, *CF*, *CG*, queſte ſaranno uguali, e però deſcritto il cerchio con uno de' raggi *CH* paſſerà per tutti i punti *H*, *I*, *D*, *F*, *G*, e ſarà toccato dai lati del dato pentagono, cui ſono perpendicolari eſſi raggi, onde gli ſarà inſcritto. Imperocchè ne' triangoli *ABC*, *CBE*, eſſendo uguali i lati *AB*, *BE*, ed il lato *BC* comune, e gli angoli *ABC*, *CBE* uguali, ſarà *CA* uguale a *CE*, e l'angolo *CEB* uguale a *CAB*, e però ancor eſſo la metà dell'angolo *BEK*. Similmente ne' triangoli *CAB*, *CAL* ſi proverà *CL* uguale a *CB*, e l'angolo *CLA* ugule a *CBA*, e però ancora eſſo la metà dell' angolo *ALK*; e così pure ſarà della retta *CK* diviſo pel mezzo l' angolo *EKL*; e paragonando i triangoli *HAC*; *IAC*, in cui l'angolo *CAH* uguaglia *CAI*, e gli angoli in *H*, ed *I* ſon retti, ed il lato *AC* comune, gli altri lati *CH*, *CI* ſaranno uguali, e parimente ſi proverà *CI* uguale a *CD*, e *CF* uguale a *CD*, e *CG* uguale a *CF*; dunque tutte queſte perpendicolari ſono raggi uguali, e però il cerchio paſſa per tutti quei punti, e rieſce inſcritto al dato pentagono, come dovea farſi.

[a] 9. 1.

Corollario. Così in qualunque figura equilatera, ed equiangola diviſi pel mezzo due angoli proſſimi, e dal concorſo delle linee dividenti condotte le perpendicolari a' lati rieſcono uguali, e condotte agli altri angoli dello ſteſſo concorſo altre rette, ſono tutte uguali, e dividono pel mezzo gli altri angoli, come ſi è provato in que-

ſto Pentagono, onde al medeſimo modo gli ſi può inſcrivere un cerchio.

PROPOSIZIONE XIV. PROBL.

Intorno al dato Pentagono equilatero, ed equiangolo IHGFD *circoſcrivere un cerchio.*

SEgati per mezzo due angoli proſſimi colle rette *IC*, *HC* concorrenti in *C*, le linee condotte dal punto *C* a tutti gli altri angoli ſaranno uguali a; dunque col raggio *CI* deſcritto il cerchio paſſerà per tutti i detti angoli, e ſarà circoſcritto al dato Pentagono. Il che ec.

a *Corollar. Prop. preced.*

Corollario. Nella ſteſſa maniera potrà circoſcriverſi un cerchio a qualunque altra figura equilatera, ed equiangola.

PROPOSIZIONE XV. PROBL.

FIG. 103.

In un dato cerchio AEF *inſcrivere un Eſagono equilatero, ed equiangolo.*

COndotto un diametro *AD* pel centro *C*, ſi applichino nel cerchio due rette di quà, e di là dal punto *A* uguali al raggio *AC*, quali ſieno *AB*, *AG* b, e congiunte al centro le rette *BC*, *GC* ſi prolunghino alla periferìa in *F*, *E*; indi tirate le rette *BE*, *ED*, *GF*, *FD*; rimarrà inſcritto nel cerchio un eſagono equilatero, ed equiangolo; perchè eſſendo i triangoli *ABC*, *AGC* equilateri, ciaſcuno degli angoli di eſſi *ACG*, ed *ACB* ſarà un terzo di due retti; però ancora *BCE*, che con gli altri due compiſce due retti, ſarà un' altro terzo di due retti; e però ſaranno

b *Prop. 1. IV.*

uguali

uguali i detti tre angoli, e gli opposti alla loro cima ECD, DCF, FCG a; e però tutti gli archi opposti a detti angoli, e le rette ad essi sottese sono uguali b; dunque $ABEDFG$ è un esagono equilatero, ed ancora equiangolo, perchè gli angoli GAB, ABE, BED ec. insistono a quattro di quegli archi uguali. (a).

a 15. 1.

b 26. e 29. III.

PROPOSIZIONE XVI. PROBL.

FIG. 104.

In un dato cerchio AEH *descrivere un Quindecagono equilatero, ed equiangolo.*

INscrivasi un pentagono $AIHGF$ nel dato cerchio c, ed ancora un triangolo equiangolo ad un altro equilatero d, che sarà esso ancora di lati uguali ADE; dunque delle quindici parti della circonferenza ne conterrà cinque l'arco AE, e tre sole l'arco AF, e nel residuo FE vi saranno due di dette parti quintedecime; onde divisa FE pel mezzo in K e, saranno EK, e KF parti quinte-

c 11. IV.

d 2. IV.

e 30. III.

(a) I. Ciascheduno dei lati dell' Esagono equilatero ed equiangolo inscritto nel cerchio è sempre uguale al raggio del medesimo cerchio.

II. La somma degli angoli retti contenuti nell' Esagono divisato ascende al numero di otto pel Corollario VI. della Proposizione XXXII. del Libro I.; e perciò tutti questi angoli presi insieme saranno l' aggregato di 720. gradi: sicchè ciascuno degli angoli di esso Esagono sarà uguale a 120. gradi.

III. Inoltre si ha una facile maniera d' inscrivere nel cerchio una figura quadrilatera, che abbia due angoli doppj degli altri due opposti, com' è appunto il quadrilatero GABE, in cui l' angolo GAB è doppio del suo opposto GEB, e l' altro ABE è doppio dell' opposto AGE, mentre l' angolo GAB è di gradi 120. essendo formato da due angoli di triangoli equilateri, e l' opposto GEB è di gradi 60., per essere uno degli angoli del triangolo equilatero BEC.

tedecime, ed applicando intorno alla circonferenza le linee rette uguali a ciascheduna delle corde *EK*, *KF*, sarà compiuto il quindecagono equilatero, ed equiangolo, insistendo qualunque angolo *FKE* di esso sopra tredici di quelle quintedecime parti. (*a*).

(*a*) Tutti gli angoli retti del Quindecagono sono in numero di 26., e perciò tutto l'aggregato è uguale a 2340. gradi; quindi diviso questo aggregato pel numero degli angoli, che sono 15., si viene in chiaro, che ciascheduno degli angoli del Quindecagono equilatero, ed equiangolo uguaglia gradi 156.

PREFAZIONE

AL LIBRO V.

DEGLI ELEMENTI

DI EUCLIDE.

FRa le Scienze tutte, che quasi ancelle fan corona alla Mattematica, come a sua Regina, niuna al certo ve ne ha, la quale, per avviso del Chiarissimo Vincenzio Viviani l'ultimo fra' più eccellenti Scolari del nostro Immortal Galilei, abbia tanta parte nelle invenzioni mattematiche, quanta per avventura, *in virtù di suo proprio rivolgimento, col maschil vigore di sua calorifica luce, se ne abbia il Sole, anima del suo nobil sistema, ch' ei con mirabili, ed incognite proporzioni vi và perpetuamente operando*; niuna, che tramandi e diffonda luce così sfolgorante non solo nelle altre parti di questa sublimissima facoltà, ma nelle Scienze ancora, e nelle Arti tutte; niuna, che risvegli, ed accenda più vivamente e più efficacemente il lume dell' intelletto umano; niuna in fine, che dimostri più chiaramente l'origine divina della mente, e la sottigliezza dell' ingegno, e la penetrazione dell' umano pensare, quanto la nobile, e pregiabilissima Scienza delle Proporzioni contenuta del Libro V. de' Geometrici Elementi, dal

Greco

Greco Scoliaste a Eudosso Gnidio attribuita, e da' Geometri col nome di *Logica Mattematica* fregiata ed adorna. Questa è la sorgente, da cui derivano le più salde ed irrefragabili argumentazioni, e per conseguenza ella è una scorta sicura, onde giungere a rintracciare il vero.

Quindi gli uomini più saggi e addottrinati nelle mattematiche speculazioni non dubitarono di asserire, essere ella così necessaria per bene e dirittamente ragionare, e per intendere più facilmente le altre parti della Mattematica, che chiunque la ignora, non può certamente meritarsi il nome di Mattematico, e quello di Filosofo.

Le varie, e tutte concludentissime maniere d'argumentare somministrateci dalla Logica Mattematica sono certamente in gran numero, contandosene fino in 116., come può agevolmente riscontrarsi nella celebratissima Opera delle Instituzioni Geometriche, parto degnissimo del nostro insigne Autore.

Le principali però, e le più essenziali a sole sette riduconsi da' Geometri, i quali supponendo quattro grandezze, o quantità fra loro omogenee, e proporzionali dimostrano, che proporzionali altresì saranno.

I. Alternando, o Permutando.

II. Per ragion Conversa, o Inversa.

III. Per Composizion di ragione, o Componendo.

IV. Per Division di ragione, o Dividendo.

V. Per Conversion di ragione.

VI. Per l'ugualità Ordinata.

VII. Per l'ugualità Perturbata.

Prima di venire alla dimostrazione di tutto questo, notar esser dee a chiunque la natura della Geometrica Proporzionalità, o Analogia, la quale consiste nella uguaglianza delle ragioni, o relazioni, a differenza della Proporzionalità Arimmetica consistente nella uguaglianza degli eccessi, o delle differenze.

Ma e dell'una, e dell'altra se ne parlerà più diffusamente, e più chiaramente a' suoi luoghi, dopo di che si spiegheranno altresì, e si dimostreranno quelle sette diverse maniere d'argumentare pocanzi divisate: sicchè questo potrà servire per dare un' idea di ciò, che si tratta in questo Libro V., e del vantaggio, che può esso arrecare a chiunque vi si applica con non ordinaria attenzione.

ELE-

ELEMENTI DELLA GEOMETRIA DI EUCLIDE

LIBRO V.

DEFINIZIONI.

I. Parte Aliquota si chiama una grandezza (a) minore di un'altra grandezza maggiore, quando quella misura questa esattamente (b).

II. Moltiplice si dice poi questa maggior grandezza di quella minore, da cui alquante volte è misurata (c).

III.

(a) Grandezza dicesi tutto quello, in cui sono, e si concepiscono alcune parti. Le voci Grandezza, Quantità, e Estensione suonano l'istesso, e a tutte e tre si conviene la Definizione divisata.

(b) Parte *aliquota*, o *sommoltiplice* chiamasi una grandezza minore, che è contenuta in un'altra, e che presa più volte misura esattamente la maggior grandezza. Il num. 2 è parte aliquota del num. 8 poichè preso il primo quattro volte uguaglia 8.

Parte *aliquanta* è quella, che è contenuta in un'altra maggior grandezza, ma non però un ugual numero di volte; onde essa non misura esattamente la grandezza maggiore, come il num. 2. preso 4. o 5. volte non misura esattamente il 9; e perciò quello dicesi *parte aliquanta* di questo.

(c) *Moltiplice* dicesi quella grandezza, che è misurata esattamente, e contiene un egual numero di volte la grandezza minore.

Grandezze *ugualmente moltiplici* di altre diconsi quelle che contengono ugual numero di volte le loro respettive parti, come il 25 del 5, il 20. del 4.

Parti simili di due grandezze son quelle, che son contenute ugual numero di volte nelle loro moltiplici, come il 5, ed il 4 sono *parti simili* del 25., e del 20.

III. PROPORZIONE, o talvolta RAGIONE si dice la relazione di due grandezze del medesimo genere in ordine alla loro quantità, comparate l' una con l' altra (*a*).

(*a*) *Proporzione*, o *Ragione* non è altro, che la relazione scambievole di due grandezze omogenee, in ordine alla loro quantità, paragonate l' una con l' altra.

I. Chiamasi *scambievole*; perchè il paragone si può cominciare dalla prima grandezza, e terminare nella seconda; o viceversa.

II. Debbe essere la relazione tra due grandezze *omogenee*; poichè, se saranno di diverso genere, non si potranno paragonare tra loro.

III. Sono *omogenee* quelle grandezze, a cui conviensi la medesima generale definizione della loro estensione, o quantità; come può esservi proporzione tra due linee, o sieno rette, o curve, tra due superficie, tra due solidi, tra due tempi, tra due velocità, tra due forze. Fra la linea però, e la superficie, fra il tempo, ed il solido non vi è relazione alcuna, per essere di genere differente fra loro.

IV. La relazione può farsi in due maniere, o si riguarda quanto una grandezza eccede un' altra, o viceversa; e questa relazione chiamasi *eccesso*, o *differenza*: o si cerca quanto una grandezza contenga, o sia contenuta da un' altra; e tal relazione suole addimandarsi *ragione*. Quindi è, che ogni ragione dee primieramente costare di due grandezze, delle quali se la prima grandezza contenga due volte la seconda, dicesi, che la prima stà alla seconda grandezza, *in ragion dupla*: se tre volte, *in ragion tripla*; se quattro, *in ragion quadrupla ec.* la seconda poi, che vien contenuta dalla prima il numero di volte indicato, dicesi stare alla prima grandezza *in ragion suddupla suttripla suqquadrupla*. In secondo luogo se le grandezze saranno tre, delle quali la prima sia doppia, o tripla ec. della seconda, come questa è doppia, o tripla ec. della terza grandezza; le ragioni quindi risultanti saranno due, e dovranno dirsi *uguali*. Parimente se le grandezze fossero quattro, e la prima di esse fosse doppia della seconda, come la terza della quarta: anche in tal caso le ragioni sarebbero due, e queste pure *uguali*.

V. *In ordine alla loro quantità*; poichè due grandezze possono paragonarsi o rispetto alla lor distanza, o rispetto agli angoli, che formano, o rispetto alla figura: ma tutti questi paragoni però non fanno al no-

stro

IV. PROPORZIONALITÀ ovvero ANALOGIA, dicesi la somiglianza di alcune Proporzioni (a).

V. Quelle Grandezze si dicono AVER PROPORZIONE, le quali moltiplicate possono superarsi l' una con l'altra. (b).

VI. Si dice SIMILE, ovvero UGUALE, anzi LA MEDE-

stro proposito; mentre quì si riguarda, e si considera la sola estensione, e grandezza, e questa ad un' altra si riferisce.

(a) *La Proporzionalità*, che da Greci è chiamata *Analogia*, è una somiglianza, o uguaglianza di ragioni, come ancora un' uguaglianza di *eccessi*, o di *differenze*.

La prima dicesi *Proporzionalità Geometrica*: la seconda *Proporzionalità Arimmetica*. Questi quattro termini 8. 4. 6. 3. si chiamano *analoghi* o sivvero *proporzionali*, e la proporzionalità è *Geometrica*; perchè in essa vi è l'uguaglianza delle ragioni: ed infatti l' 8. contiene tante volte il 4., quante il 6. contiene il 3.

Quest' altri termini 8. 6. 5. 3. formano la proporzionalità detta *Arimmetica*, perchè l' eccesso dell' 8. sopra il 6. è uguale all' eccesso del 5. sopra il 3; oppure la differenza del 6. dall' 8. è uguale alla differenza del 3. dal 5.

Oltre le due proporzionalità Geometrica, ed Arimmetica vi è un' altra specie, che *Armonica* si appella. Questa consiste in tre termini, de' quali il primo stà al terzo, come la differenza del primo dal secondo alla differenza del secondo dal terzo. I termini sieno questi tre 6. 4. 3.

Stà 6. a 3., (il massimo al minimo, o il primo al terzo) come 2. (differenza del primo dal secondo) ad 1. (differenza del secondo dal terzo.) cioè 6 . 3 :: 2 . 1 : onde siccome il primo termine è doppio del terzo, così la prima differenza è doppia della seconda.

(b) Diconsi *aver proporzione* quelle grandezze, che moltiplicate possono superarsi l' una con l' altra.

I. Quindi ne segue, che la proporzione non può sussistere fra altre grandezze, che fra quelle, le quali sono di tal natura, che se la minore di esse prendasi, o si moltiplichi un determinato numero di volte, supererà finalmente quella grandezza, che era di tutte la massima.

II. Una linea adunque è del medesimo genere con un' altra linea; e conseguentemente tra loro paragonate riguardo alla loro quantità possono aver proporzione.

MEDESIMA essere la PROPORZIONE di una prima grandezza ad una seconda, e quella di una terza ad una quarta, quando prese due ugualmente moltiplici della prima, e della terza, ed altre due, secondo qualunque numero, ugualmente moltiplici della seconda, e della quarta, se il moltiplice della prima uguaglia il moltiplice della seconda, o sia maggiore di essa, o minore; parimente il moltiplice della terza uguagli il moltiplice della quarta, o sia respettivamente maggiore, o minore di essa (a).

VII.

(a) Due *Ragioni*, o *Proporzioni* saranno fra loro *simili*, *uguali*, anzi *le medesime*: oppure poste quattro grandezze, la proporzione d'una prima grandezza ad una seconda sarà uguale alla proporzione d'una terza grandezza ad una quarta, quando (prese due altre grandezze ugualmente moltiplici della prima, e della terza, ed altre due ugualmente moltiplici della seconda, e della quarta, secondo qualunque numero) essendo il moltiplice della prima uguale al moltiplice della seconda; anche il moltiplice della terza sia uguale al moltiplice della quarta: come ancora essendo il moltiplice della prima maggiore, o minore del moltiplice della seconda; anche il moltiplice della terza riesca maggiore, o minore del moltiplice della quarta. In somma per dir tutto in breve: sono le grandezze nella medesima, o in uguale ragione o proporzione, qualora gli equimoltiplici della prima, e della terza grandezza ugualmente mancano, o pareggiano, o eccedono gli equimoltiplici della seconda, e della quarta, prendendo a piacere i moltiplicatori. E per illustrare ciò con un esempio: date le quattro grandezze 20. 5. 8. 2; le ragioni, o proporzioni di esse sono due. Per discernere adunque, e determinare l'uguaglianza, o disuguaglianza loro, si eseguisca ciò, che prescrivesi dalla Definizione.

Prendansi gli ugualmente moltiplici della prima, e della terza grandezza, cioè il duplo del 20., e dell'8; i moltiplici adunque di esse saranno

I. III.
40. 16.

I. Prendansi gli ugualmente moltiplici della seconda, e della quarta grandezza, cioè l'ottuplo del 5, e del 2; i moltiplici di esse saranno

II. IV.
40. 16.

II. Prendasi parimente il nonu-

VII. E queste grandezze, che avranno simile proporzione, si chiameranno PROPORZIONALI (a).

VIII. Ma se il moltiplice della prima superasse il

nuplo del 5, e del 2; i moltiplici saranno

II. IV.
45. 18.

III. Prendansi finalmente gli ugualmente moltiplici della seconda, e della quarta grandezza, cioè il triplo del 5, e del 2; i moltiplici di essa saranno

II. IV.
15. 6.

Adunque da questa operazione comprendesi, che se il moltiplice della prima grandezza è uguale, maggiore, o minore del moltiplice della seconda; il moltiplice pure della terza sia uguale, maggiore, o minore del moltiplice della quarta grandezza: in tal caso le due ragioni saranno fra loro *simili*, *uguali*, *le medesime*, oppure le quattro semplici grandezze 20. 5. 8. 2. saranno *proporzionali*.

La maggior parte però de' moderni Geometri non fa uso veruno di tal Definizione; e stabiliscono esser proporzionali quattro grandezze, qualora la prima contenga, o sia contenuta nella seconda grandezza tante volte, quante la terza contiene, o è contenuta nella quarta grandezza: lo che fu stabilito anche da Euclide istesso, come vedesi nel Libro VII. Il sapientissimo Galileo trattando della Defin. IV. sul principio del Dialogo V così si espresse: *e chi è quell' ingegno tanto felice, il quale abbia certezza, che allora quando le quattro grandezze sono proporzionali, gli ugualmente moltiplici si accordano sempre?* Quindi conchiude: *parmi questo di Euclide piuttosto un Teorema da dimostrarsi, che una definizione da premettersi*. Per questo appunto io ho notato quanto sopra tale materia insegna il medesimo Galileo coerentemente a ciò, che era stato insegnato da Euclide nel Libro VII. trattando de' Numeri: *allora* son parole del Galileo, *noi diremo quattro grandezze esser fra loro proporzionali, cioè avere la prima alla seconda la stessa proporzione, che ha la terza alla quarta, quando la prima sarà uguale alla seconda, e la terza ancora sarà uguale alla quarta; ovvero quando la prima sarà tante volte moltiplice della seconda, quante volte precisamente la terza è moltiplice della quarta*.

(a) Quelle grandezze, che avranno fra loro *simile*, *o uguale proporzione*, si chiameranno proporzionali, come 16. 8. :: 20. 10; poichè la proporzione, che è tra'l 16. e l' 8, è uguale all' altra del 20 al 10 essendo dupla sì l' una, come l' altra.

il moltiplice della seconda, e l'ugualmente moltiplice della terza, come quello della prima, non eccedesse quello della quarta ugualmente moltiplice, come l'altra della seconda; si dirà LA PROPORZIONE della prima grandezza alla seconda MAGGIORE di quella della terza alla quarta [a].

IX. La PROPORZIONALITA', o ANALOGIA dee consistere almeno in tre termini [b], di cui il mezzano

(*a*) Date quattro grandezze, dicesi la prima aver *maggior proporzione* alla seconda di quello, che l'abbia la terza grandezza alla quarta, quando (presi gli ugualmente moltiplici della prima, e della terza, come ancora gli ugualmente moltiplici della seconda, e della quarta grandezza) il moltiplice della prima, superando quello della seconda; il moltiplice però della terza non supera quello della quarta grandezza. Ne sia questo l'esempio. Date le quattro seguenti grandezze 10. 5. 4. 3. Si prenda il duplo del 10, e del 4; i moltiplici sono

I. III.
20. 8.

Si prendano gli ugualmente moltiplici della seconda, e della quarta grandezza, cioè il triplo del 5, e del 3; i moltiplici saranno

II. IV.
15. 9.

Essendo il moltiplice della prima grandezza maggiore del moltiplice della seconda, ma il moltiplice della terza essendo minore di quello della quarta grandezza; quindi conchiudesi, che le quattro grandezze non sono proporzionali; e che la proporzione, qual è tra la prima grandezza, e la seconda, è maggiore della proporzione, che è tra la terza, e la quarta grandezza.

(*b*) L'*Analogia*, o *proporzionalità* non può consistere in meno, che in tre termini di grandezze, quali però debbono essere omogenee, come sarebbe ne' termini di tre linee, di tre superficie, di tre corpi ec., quando cioè il primo termine al secondo ha proporzione simile a quella, che ha il secondo al terzo. L'analogia pertanto, o proporzionalità altra è *continua*, altra *discontinua*, o *disgiunta*. Chiamasi *continua* quando nella comparazione di tre, di quattro, e di più termini di grandezze omogenee, e proporzionali, quei di mezzo si prendono due volte, servendo ciascuno prima di termine conseguente di una proporzione, e poi di termine antecedente dell' altra

zano si prende due volte, una per conseguente della prima proporzione, l'altra per antecedente della seconda uguale alla prima.

X. Quando tre grandezze saranno proporzionali, la prima alla terza si dirà avere DOPPIA PROPORZIONE di quella, che è tra la prima, e la seconda, o dell'altra uguale, che è tra la seconda, e la terza.

XI. Se saranno quattro grandezze continuamente proporzionali, avrà la prima alla quarta TRIPLA PROPORZIONE di quella, che ha la prima alla seconda, o la seconda alla terza, o la terza alla quarta. Se saranno cinque, la prima all'ultima avrà PROPORZIONE QUADRUPLA di quella, che ha la prima alla seconda, e di qualunque altra intermedia (a), e così sempre crescendo i termini dell'ana-

altra simile proporzione, che le succede: e per ispiegarmi più chiaramente, quando il primo al secondo termine stà, come il secondo al terzo, e come il terzo al quarto, e così continuando fino all'ultimo termine; allora tutti diconsi quantità, o grandezze continue proporzionali.

Appellasi *discontinua*, o *disgiunta*, quando fra due, tre, o più coppie di simili proporzioni tra quantità omogenee, oppure anche tra quantità a due a due eterogenee, i termini delle simili proporzioni si paragonano a coppia a coppia, talchè niuno mai dei termini conseguenti di una proporzione serva d'antecedente all'altra simile, che ne vien dopo. Lo che avverrà, qualora il primo termine stà al secondo, come il terzo al quarto, e come il quinto al sesto, e così sempre ec.

(a) La Definizione X., e XI. non altro significa, se non che, date più grandezze continue proporzionali, tra la proporzione della prima alla terza grandezza cadono due proporzioni, cioè la proporzione della prima grandezza alla seconda, e la proporzione della seconda grandezza alla terza; e perciò la proporzione della prima alla terza grandezza dicesi *duplicata* della proporzione, che ha la prima grandezza alla seconda: tra

l' analogia, la proporzione dell' estreme è moltiplice di quella di due prossime, secondo il numero di essi termini, detrattane l' unità.

XII. Delle quantità proporzionali si dicono OMOLOGI gli antecedenti fra loro, ed i conseguenti pure tra di loro comparati.

AVVERTIMENTO.

Altre definizioni della Proporzione PERMUTATA CONVERSA ec. *si omettono, perchè dalle Proposizioni, che ne parlano susseguentemente, meglio s' intenderanno.*

Quanto alla similitudine, o ugualità delle proporzioni, definita al num. VI. *per gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, che convengono con gli ugualmente moltiplici de' conseguenti, secondo qualunque altra moltiplicazione, in uguagliarsi, avanzarsi, o mancarsi l' uno dall' altro; si avverta, che sebbene nelle quantità commensurabili, le quali esprimere si possono col numero delle parti uguali, che sono nell' una, e nell' altra, si può definire più chiaramente l' ugualità delle proporzioni con la definizione, che il medesimo Euclide dà nel suo Libro* VII. *de' numeri proporzionali, a cui altra proprietà non assegna, se non che il primo sia ugualmente moltiplice del secondo, come il terzo del quarto, o la medesima parte, o altrettante parti sia qualunque antecedente del*

tra la proporzione della prima alla quarta grandezza cadono tre proporzioni; onde quella si domanderà *triplicata*: similmente tra la proporzione della prima alla quinta cadono quattro proporzioni, e per conseguenza si dirà *quadruplicata*, e sempre di quella proporzione, che ha la prima grandezza alla seconda, perchè tutte le altre proporzioni, che vi sono di mezzo, si danno tutte simili a questa.

del suo conseguente: tuttavolta nelle quantità incommensurabili, di cui non può assegnarsi veruna misura comune, che sia alcune volte in una, ed alquante altre volte nell' altra, non potrebbe assegnarsi tale definizione di proporzionalità; e perciò si adatta quella condizione più universale degli ugualmente moltiplici de' termini antecedenti, che convengano nell' ugualità, nell' eccesso, o nel difetto con altri ugualmente moltiplici de' conseguenti.

Le quantità, che si paragonano in proporzione, debbono essere del medesimo genere secondo la definizione terza; onde non può paragonarsi una linea ad una superficie, o ad un corpo, nè un peso ad un tempo, nè un moto ad un suono ec. bensì tutte le linee fra di loro, tutte le superficie tra loro, ogni corpo ad un altro, i pesi tra loro, i tempi fra loro ec. Però non è da attendersi un genere specialissimo, e subalterno, con cui differiscono le linee rette dalle curve, e le superficie piane dalle rotonde ec. ma solamente il genere più universale di cui allora sono le grandezze, quando qualunque di esse moltiplicata può superare l' altra, secondo la definizione quinta. Così il diametro di un cerchio quadruplicato eccede la di lui circonferenza, e però si possono insieme paragonare una retta, ed una periferìa; anzi qualunque altra curva di diversa specie; ed una superficie piana ad una sferica, o conica; e qualsivoglia corpo prismatico a qualunque rotondo. Ma quanto alla proporzionalità, o analogìa delle proporzioni, possono essere i due primi termini dello stesso genere, e gli altri due o del medesimo, o di genere diversissimo; così può essere un corpo ad un altro nella stessa proporzione, che una linea ad un' altra linea; ovvero

una

una superficie ad un' altra superficie; o come un' angolo rettilineo ad un altro pur rettilineo; o come un peso ad un altro peso; o come la velocità di un moto a quella di un' altro ec., e così qualunque grandezza ad un' altra grandezza dello stesso genere può paragonarsi, come un numero ad un altro numero, o a qualche radice sorda.

SPIEGAZIONE

Di alcuni segni da adoprarsi per l' avvenire, per esporre con più breve caratterismo le cose da spiegarsi circa le proporzioni.

Il segno $+$ significa aggiunta, di maniera che $A+B$ esprime l' aggregato delle due quantità A, e B poste insieme.

Il segno $-$ significa la detrazione di una grandezza dall' altra, come $A-B$ esprimerebbe l' eccesso della grandezza A sopra l' altra B, detratta da quella.

Il segno $>$ significa l' essere maggiore; e la contraria posizione di esso $<$ importa l' essere minore. Così $A > B$ vuol dire, che A è maggiore di B; ma $C < D$ importa, che C sia minore dell' altro D.

Il segno $=$ significa l' ugualità, di maniera che $A=B$ esprime, che la grandezza A uguaglia B; e così se fosse espresso $E+F=M-N$, indicherebbe, che la somma delle quantità E, ed F fosse uguale all' eccesso di M sopra N, cioè alla quantità M, detrattane l' altra N, secondo le anteriori espressioni.

La proporzione di una quantità ad un'altra si espone con un punto interposto; e la proporzionalità, o analogia si esprime con quattro punti intercetti fra le due proporzioni. Per esempio *AB . EC :: EF . EG* vuol dire, che la quantità *AB* alla quantità *AC* ha la stessa proporzione, che la quantità *EF* all' altra *EG*; ma se fosse espresso *A . B* > *C . D*, importerebbe, che la proporzione di *A* a *B* fosse maggiore dell' altra, che è tra *C*, e *D*.

La motiplicazione di una quantità in un' altra può esprimersi con la croce di S. Andrea, per esempio *AB*×*CD*, vorrà dire la quantità *AB* moltiplicata in *CD*; e così 7 × 4 = 28 significa, essere sette via quattro uguale a ventotto ec.

PROPOSIZIONE I.

FIG. 105.

Se siano quante si vogliano grandezze AD, FI, LO *ugualmente moltiplici di altrettante*, E, K, P, *ciascuna di ciascuna; quante volte è moltiplice una di una, per esempio* AD *di* E, *tante volte sarà moltiplice la somma di tutte l' antecedenti* AD, FI, LO *dell' aggregato di tutte le conseguenti*, E, K, P. (a)

(a) Si suppone in questa prima Proposizione la grandezza AD tante volte moltiplice della sua parte aliquota E, quante è moltiplice FI di K, e LO di P; talchè

AD . E :: FI . K :: LO . P;

cioè stia AD ad E, come FI a K, come LO a P: onde ne segue, che le grandezze intiere AD, FI, LO si domandano *antecedenti*, e le parti aliquote E, K, P *conseguenti*. Quindi conchiudesi, che

AD . E :: AD + FI + LO . E + K + P,

IMperocchè divisa AD nelle parti AB, BC, CD uguali ad E, potrà dividersi ancora FI in altrettante parti FG, GH, HI uguali a K; e così LQ nelle parti LM, MN, NO uguali a P (a); dunque $AB + FG + LM = E + K + P$; e similmente $BC + GH + MN = E + K + P$; ed ancora $CD + HI + NO = E + K + P$ (b); dunque quante volte una delle antecedenti AD è moltiplice di E, altrettante volte tutte le antecedenti $AD + FI + LO$ sono moltiplici di tutte le conseguenti $E + K + P$. Il che ec. (c).

(a) Sicchè ciascuna delle tre grandezze antecedenti è tripla della sua respettiva parte aliquota conseguente.

(b) Essendo pertanto ciascuno de' tre aggregati delle parti contenute nelle grandezze antecedenti uguale alla somma delle tre parti conseguenti; è chiaro, che tutti e tre quelli aggregati presi insieme, i quali formano la somma delle tre intiere grandezze antecedenti, saranno tripli dell' altra somma delle parti conseguenti: ma ciascheduna delle tre antecedenti grandezze era tripla della sua respettiva parte conseguente; dunque ec.

(c) Si suppone $AD . E :: FI . K :: LO . P$.
Sicchè starà $AD . E :: AD + FI + LO . E + K + P$.

Esempio Numerico.

Sia la grandezza $AD = 9$. $FI = 12$. $LO = 15$.
La parte aliquota $E = 3$. $K = 4$. $P = 5$.
Tutte e tre le intiere grandezze $9 + 12 + 15 = 36$.
Tutte e tre le parti aliquote $3 + 4 + 5 = 12$.
Dunque $9 . 3 :: 9 + 12 + 15 . 3 + 4 + 5$.
cioè $9 . 3 :: 36 . 12$.

PROPOSIZIONE II.

FIG. 166. *Se la prima grandezza* AC *è moltiplice della seconda* D, *come la terza* GE *è moltiplice ugualmente della quarta* H; *ed una quinta* CB *sia ancora moltiplice della seconda* D, *come una sesta* GF *è moltiplice ugualmente della quarta* H; *sarà l'aggregato della prima, e della quinta,* AC+CB, *ugualmente moltiplice della seconda* D, *come l'aggregato della terza, e della sesta,* EG+GF, *è moltiplice della quarta* H.

IMperocchè il numero delle parti uguali alla *D*, che sono nella prima *AC*, uguagliando il numero delle parti uguali ad *H*, che sono nella terza *EG*; ed ancora il numero delle parti uguali a *D*, che sono nella quinta *CB*, uguagliando il numero delle parti uguali ad *H*, che sono nella sesta *GF*; dunque il numero delle parti uguali a *D*, che sono in *AC+CB*, uguaglia il numero delle parti uguali ad *H*, che sono in *EG+GF*; dunque l'aggregato *AC+CB* ugualmente è moltiplice della seconda *D*, come l'aggregato *EG+GF* è moltiplice della quarta *H* (a). Il che ec.

PRO-

(a) Si suppone, che I. AC . D :: EG . H:
II. CB . D :: GF . H;
quindi rilevasi che AC+CB . D :: EG+GF . H.

Esempio Numerico.

Sia AC = 9, e D = 3. EG = 12, ed H = 4.
CB = 15. GF = 20.

E' chiaro, che 9 + 15 . 3 :: 12 + 20 . 4
cioè 24 . 3 :: 32 . 4

PROPOSIZIONE III.

Se la grandezza B *è moltiplice di* C, *com' un altro* E *di* F, *ed* IA *moltiplice di* B, *come* MD *di* E; *sarà pure* IA *moltiplice di* C, *come* MD *di* F. FIG. 187.

SI dividono le grandezze *IA*, *MD*; quella nelle parti *AG*, *GH*, *HI* uguali a *B*; questa nelle parti *DK*, *KL*, *LM* uguali a *E*; essendo adunque *AG* moltiplice di *C*, come *DK* di *F*; ed ancora *GH*, e *HI* moltiplice di *C*, come *KL*, ed *LM* di *F*; sarà tutta l' *AI* moltiplice di *C*, come tutta la *DM* di *F* b (a). Il che ec. a. 2. V.

PROPOSIZIONE IV.

Essendo nella stessa proporzione A . B :: C . D; *prese due grandezze* E, F *ugualmente moltiplici degli antecedenti* A, C; *ed altre grandezze* G, H *ugualmente moltiplici de' conseguenti* B, D, *saranno parimente proporzionali* E . G :: F . H. FIG. 188.

IMperocchè prese due altre *K*, *L* ugualmente moltiplici di *E*, *F*, saranno queste pure ugualmente moltiplici di *A*, *C* c; e similmente prese b 3. V.

M, *N*

(*a*) Suppongasi, che I . B . C :: E . F;
II . IA . B :: MD . E;
è manifesto, che . IA . C :: MD . F.

Esempio Numerico.

Sia B = 4, e C = 2. E = 6, ed F = 3.
AI = 12. MD = 18.
Adunque 12 . 2 :: 18 . 3.

M, N ugualmente moltiplici di G, H, saranno esse pure ugualmente moltiplici di B, D [a]: dunque se $K = M$, ancora $L = N$; se $K > M$, sarà pure $L > N$; se $K < M$, parimente $L < N$ [b]; dunque sarà $E . G :: F . H$ (a). Il che ec.

a 3. v.

b Def. 6. v.

COROL-

(a) *Altra dimostrazione.*

Si ammetta, che secondo la dottrina d'Euclide nel suo Libro VII., sopra cui si appoggia questa del soprallodato Galileo, e di cui ne faremo uso nelle seguenti Proposizioni, che *allora quattro grandezze sieno proporzionali, quando le due grandezze antecedenti sono uguali, o ugualmente moltiplici, o summoltiplici delle altre due conseguenti.*

Date pertanto queste quattro grandezze proporzionali; stia cioè A . B :: C . D; è manifesto, che gli antecedenti termini A, e C saranno uguali, o ugualmente moltiplici, o summoltiplici dei conseguenti B, e D.

Sienogli antecedenti moltiplici ugualmente dei suoi conseguenti; e prendansi altre due grandezze E, ed F ugualmente moltiplici delle antecedenti A, e C, talchè stia E . A :: F . C; è chiaro per la precedente Proposizione, che E . B :: F . D. Prendansi ora gli ugualmente moltiplici dei conseguenti B, e D, cioè si aggiunga ai medesimi conseguenti un ugual numero di parti simili a quelle, delle quali sono composte le grandezze E, ed F, onde ne risultino altre due grandezze G, ed H; ne verrà, che le due antecedenti grandezze E, ed F saranno o uguali, o ugualmente moltiplici

Corollario. Quindi si osservi, che qualunque volta sono quattro grandezze proporzionali, ancora *convertendo*; cioè presi i conseguenti per antecedenti, e gli antecedenti per conseguenti, saranno pure proporzionali; cioè se $A . B :: C . D$; ancora $B . A :: D . C$ (a); giacchè per la definizione

---

tiplici, o summoltiplici dell' altre due G, ed H, e perciò le ultime due grandezze antecedenti essendo o uguali, o ugualmente moltiplici, o summoltiplici dell' altre due ultime grandezze conseguenti; sarà vero, che E . G :: F . H, e saranno conseguentemente queste quattro grandezze *proporzionali*.

Esempio Numerico delle Proposizioni.

Sia A = 12; B = 2; C = 30., D = 5 supponendosi quattro grandezze proporzionali. Stia adunque 12 . 2 :: 30 . 5.

Prendansi gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, cioè il duplo di ambedue, che sono il 24 ed il 60; ne verrà per la Proposizione seconda di questo Libro, che starà

24 . 2 :: 60 . 5.

Presi parimente gli ugualmente moltiplici de' conseguenti, cioè il triplo dell' uno, e dell' altro, che sono il 6 ed il 15 (lo che non è altro, che un aggiungere ai conseguenti medesimi un ugual numero di parti simili a quelle degli antecedenti 24, e 60:) si conchiude, che starà 24 . 6 :: 60 . 15.

(a) Ed infatti se è vero, che quattro grandezze allora saranno proporzionali, quando le antecedenti due grandezze sieno ugualmente moltiplici dell' altre due conseguenti; sarà vero altresì, che do-

ne festa tutti gli ugualmente moltiplici degli antecedenti *A*, *C* si accordano in uguagliare, superare, o mancare dagli ugualmente moltiplici de' conseguenti *B*, *D*; dunque ancora gli ugualmente moltiplici di *B*, *D* presi per antecedenti, si debbono accordare con gli ugualmente moltiplici di *A*, *C*, presi per conseguenti; e però ancora convertendo sono le grandezze proporzionali.

PROPOSIZIONE V.

FIG. 109. *Se la grandezza* AB *è moltiplice della grandezza* CD, *come la parte* AE *levata dalla prima è moltiplice della parte* CF, *levata dalla seconda; ancora la rimanente* EB *sarà moltiplice ugualmente della residua* FD. Pon-

---

dovranno essere proporzionali, quando le conseguenti sieno ugualmente summoltiplici delle antecedenti; onde poste le conseguenti grandezze in luogo delle antecedenti, e queste in luogo delle conseguenti, saranno pure le quattro grandezze fra loro proporzionali. Dunque se

A . B :: C . D;

anche *convertendo* saranno proporzionali, cioè starà

B . A :: D . C.

Questa maniera d' argumentare chiamasi in latino *invertendo*, o *convertendo*. Sicchè *ragione inversa* altro non è, che un prendere i conseguenti come antecedenti, e questi come conseguenti.

Esempio Numerico del Corollario.

Essendo 12 . 2 :: 30 . 5;
Convertendo starà 2 . 12 :: 5 . 30,
mentre il 2 è summoltiplice ugualmente del 12, come il 5 del 30.

Pongasi AG ugualmente moltiplice di FD, come AE di CF; dunque sarà GE moltiplice di CD, come AE di CF [a]: ma era AB moltiplice di CD, come AE di CF; dunque $GE = AB$, e tolta di Comune l'AE, sarà $AG = EB$; dunque ancora la rimanente EB è moltiplice della residua FD, come tutta l'AB di tutta la CD, e come la parte levata AE della parte levata CF (a). Il che ec.

a 1. V.

PROPOSIZIONE VI.

TAV. VI. FIG. 110.

Se due grandezze AB, CD *sono ugualmente moltiplici di due* E, F, *e da quelle si traggano le due* AG, CH, *ancor' esse egualmente moltiplici di queste* E, F, *saranno le rimanenti* GB, HD *o uguali alle medesime, o ugualmente moltiplici di esse.*

Essendo il numero delle parti contenute in AB uguali ad E, uguale al numero delle parti contenute in CD uguali ad F, detratto dal primo il numero delle parti E contenute in AG, e dal secondo il numero uguale delle parti F, contenute in CH; il rimanente numero delle parti E contenute in GB uguaglierà pure il numero

---

(a) $AB = AE + EB : CD = CF + FD$.
Si Suppone, che $AB . CD :: AE . CF$:
dunque starà $EB . FD :: AB . CD :: AE . CF$.

Esempio Numerico.

$20 = 12 + 8 . 5 = 3 + 2$.
Essendo $20 . 5 :: 12 . 3$;
dunque starà $8 . 2 :: 20 . 5 :: 12 . 3$.

a Assiom. 2. ro delle parti F contenute in HD a; e però se $GB = E$; contenendola una volta sola, ancora $HD = F$, che la conterrà pure una sola volta; ma se GB resterà alquanto moltiplice di E, ancora HD rimarrà ugualmente moltiplice di F (a). Il che ec.

PROPOSIZIONE VII. (b)

FIG. 111. *Se sieno due grandezze* A, B *trà di loro uguali avran-*

(a) $AB = AG + GB : CD = CH + HD$:

Suppongasi I, che AB . E :: CD . F:

II, che AG . E :: CH . F:

sarà GB = E, come HD = F;

oppure starà GB . E :: HD . F.

Esempio Numerico.

I. 15 . 5 :: 12 . 4.

II. 10 . 5 :: 8 . 4.

Detratti adunque dagli antecedenti della prima serie gli antecedenti della serie seconda, i residui uguaglieranno i conseguenti. Che se suppongasi, che I. 30 . 5 :: 24 . 4

II. 20 . 5 :: 16 . 4

starà dunque 10 . 5 :: 8 . 4

(b) Le prime sei Proposizioni di questo Libro, le quali sono necessarie soltanto per dimostrare le altre coll' uso delle quantità ugualmente moltiplici, da una gran parte de' Geometri son giudicate come superflue, e perciò tralasciate a riserva della Proposizione IV., di cui alcuni di loro ne fanno uso. Quest' altre cinque poi, che a quelle ne succedono, sono da essi riportate, ma le considerano come altrettanti assiomi; onde non ne fanno dimostrazione veruna.

avranno a qualunque terza C *la medesima proporzione; ed ancora paragonata* G *ad ambedue, avrà l'istessa proporzione ad esse.*

CIò è per se stesso evidente; pure si dimostra, perchè le ugualmente moltiplici *D*, *E* delle due uguali *A*, *B* saranno pure uguali; e presa *F* in qualunque modo moltiplice di *C*, si accorderanno le moltiplici *D*, *E* in uguagliare, superare, o mancare dalla moltiplice *F*; pertanto[a] *A.C::B.C*, e convertendo *C . A :: C . B* [b] (a); Il che ec.

a *Def. 6.*
b *Coroll. Pr. 4. V.*

PRO-

(a) Atteso il principio di sopra stabilito, e nella Annotazione alla Definizione IV., e VI., e nell'altra della Proposizione IV; due ragioni o proporzioni, che possono consistere in soli tre termini, (Def. IX. del V.) sono uguali, quando gli antecedenti sono ugualmente moltiplici, o summoltiplici del loro conseguente; o viceversa.

Ma paragonata la grandezza A con l'altra C; e B con la medesima C, le antecedenti grandezze A, e B sono equimoltiplici, o equisummoltiplici della conseguente grandezza C, per essere elleno uguali per l' Ipotesi; dunque le ragioni di A a C, e di B a C saranno uguali, e perciò starà

A . C :: B . C:
e *Convert.* C . A :: C . B. (*Cor. Pr.* IV. V.

Esempio Numerico.

Date le tre grandezze A = 16, B = 16, C = 2; è manifesto, che 16 . 2 :: 16 . 2:
e *Convert.* che 2 . 16 :: 2 . 16.

PROPOSIZIONE VIII.

FIG. 112. *Delle disuguali grandezze* A B, *e* D *la maggiore* A B *ad una terza* K *avrà maggior ragione, che la minore* D *alla medesima* K; *ma viceversa è maggiore la proporzione di* K *alla minore* D, *che alla maggiore* A B.

Posta $AC = D$, si moltiplichino ugualmente AC, e CB nelle EF, FG in maniera tale, che ognuna di queste moltiplici sia maggiore di K; indi si potrà moltiplicare essa K in maniera, che riesca prossimamente maggiore di EF; ma minore di EG. Sia questa moltiplice EH; dunque EG essendo moltiplice di AB, come EF di AC, o della uguale D [a]; il moltiplice di essa AB supera il moltiplice della grandezza K, che è per l' Ipotesi EH: laddove EF moltiplice di D è minore di EH moltiplice di K; però $AB . K > D . K$ [b]; e viceversa, perchè il moltiplice di K, cioè EH è maggiore di EF, che è il moltiplice di D, ma la stessa EH è minore di EG moltiplice di AB; però $K . D > K . AB$. Il che era da dimostrarsi (a).

a 1. v.

b Def. 8. v.

PRO-

(a) Date due ragioni o proporzioni, la prima si dirà *maggiore* della seconda ragione, qualora il numero delle parti simili, che contiene in se il primo moltiplice antecedente paragonato col numero per le parti del conseguente, sia maggiore del numero delle parti simili, che contiene il secondo moltiplice antecedente, relativamente al suo conseguente. L' istes-

PROPOSIZIONE XI.

Se le grandezze A, B *ad una terza* C *hanno la medesima proporzione, sarà* A=B: *e similmente se* C *ha l' istessa proporzione ad* A, *ed a* B; *è* A=B.

FIG. 113.

PErchè se non fosse $A=B$, ma una di loro maggiore, per esempio $A>B$; sarebbe la proporzione di $A.C > B.C$: e la proporzione di $C.B > C.A$ [a]; dunque essendo $A, C :: B . C$, ov-

a 8. v.

L' istesso pure dovrà dirsi, quando una parte, ovvero una delle parti simili sia contenuta nella sua moltiplice grandezza un minor numero di volte di quello sia contenuta in un' altra grandezza parimente moltiplice. Ma il numero delle parti, che in se contiene l' AB paragonata con K, è per l' Ipotesi maggiore del numero delle parti, che contiene la D paragonata con la medesima K; dunque la ragione di AB a K sarà maggiore dell' altra di D a K; cioè

$$AB . K > D . K;$$

come ancora $K . D > K . AB$;

Esempio Numerico.

Sia AB=9, D=6, e K=3.
Siccome il 9 contiene il 3 un maggior numero di volte di quello, che il 6 contenga l' istesso 3; perciò

$$9 . 3 > 6 . 3;$$

onde $3 . 6 > 3 . 9$.

PROPOSIZIONE II.

FIG. 106. *Se la prima grandezza* A C *è moltiplice della seconda* D, *come la terza* G E *è moltiplice ugualmente della quarta* H; *ed una quinta* C B *sia ancora moltiplice della seconda* D, *come una sesta* G F *è moltiplice ugualmente della quarta* H; *sarà l' aggregato della prima, e della quinta,* AC+CB, *ugualmente moltiplice della seconda* D, *come l' aggregato della terza, e della sesta,* E G+G F, *è moltiplice della quarta* H.

IMperocchè il numero delle parti uguali alla *D*, che sono nella prima *AC*, uguagliando il numero delle parti uguali ad *H*, che sono nella terza *EG*; ed ancora il numero delle parti uguali a *D*, che sono nella quinta *CB*, uguagliando il numero delle parti uguali ad *H*, che sono nella sesta *GF*; dunque il numero delle parti uguali a *D*, che sono in *AC+CB*, uguaglia il numero delle parti uguali ad *H*, che sono in *EG+GF*; dunque l'aggregato *AC+CB* ugualmente è moltiplice della seconda *D*, come l'aggregato *EG+GF* è moltiplice della quarta *H* (a). Il che ec.

PRO-

(a) Si suppone, che I. AC . D :: EG . H:
II . CB . D :: GF . H;
quindi rilevasi che AC+CB . D :: EG+GF . H.

Esempio Numerico.

Sia AC = 9, e D = 3. E G = 12, ed H = 4.
CB = 15. GF = 20.
E' chiaro, che 9+15 . 3 :: 12+20 . 4
cioè 24 . 3 :: 32 . 4

PROPOSIZIONE III.

Se la grandezza B *è moltiplice di* C, *com' un altro* E *di* F, *ed* I A *moltiplice di* B, *come* M D *di* E; *sarà pure* I A *moltiplice di* C, *come* M D *di* F. FIG. 187.

SI dividono le grandezze *IA*, *MD*; quella nelle parti *AG*, *GH*, *HI* uguali a *B*; questa nelle parti *DK*, *KL*, *LM* uguali a *E*; essendo adunque *AG* moltiplice di *C*, come *DK* di *F*; ed ancora *GH*, e *HI* moltiplice di *C*, come *KL*, ed *LM* di *F*; sarà tutta l' *AI* moltiplice di *C*, come tutta la *DM* di *F* b (a). Il che ec. b 2. V.

PROPOSIZIONE IV.

Essendo nella stessa proporzione A : B :: C . D, *prese due grandezze* E, F *ugualmente moltiplici degli antecedenti* A, C, *ed altre grandezze* G, H *ugualmente moltiplici de' conseguenti* B, D, *saranno parimente proporzionali* E : G :: F : H. FIG. 188.

IMperocchè prese due altre *K*, *L* ugualmente moltiplici di *E*, *F*, saranno queste pure ugualmente moltiplici di *A*, *C* c; e similmente prese c 3. V.

M, *N*

(a) Suppongasi, che I . B . C :: E : F;
II : IA . B :: MD : E;
è manifesto, che . IA . C :: MD : F.

Esempio Numerico:

Sia B = 4, e C = 2 : E = 6, ed F = 3.
AI = 12. MD = 18.
Adunque 12 : 2 :: 18 : 3.

M, *N* ugualmente moltiplici di *G*, *H*, saranno esse pure ugualmente moltiplici di *B*, *D* [a]: dunque se *K* = *M*, ancora *L* = *N*; se *K* > *M*, sarà pure *L* > *N*; se *K* < *M*, parimente *L* < *N* [b]; dunque sarà *E* . *G* :: *F* . *H* (a). Il che ec.

a 3. v.

b Def. 6. v.

COROL-

(a) *Altra dimostrazione.*

Si ammetta, che secondo la dottrina d'Euclide nel suo Libro VII., sopra cui si appoggia questa del soprallodato Galileo, e di cui ne faremo uso nelle seguenti Proposizioni, che *allora quattro grandezze sieno proporzionali, quando le due grandezze antecedenti sono uguali, o ugualmente moltiplici, o summoltiplici delle altre due conseguenti.*

Date pertanto queste quattro grandezze proporzionali, stia cioè A . B :: C . D; è manifesto, che gli antecedenti termini A, e C saranno uguali, o ugualmente moltiplici, o summoltiplici dei conseguenti B, e D.

Sienogli antecedenti moltiplici ugualmente dei suoi conseguenti; e prendansi altre due grandezze E, ed F ugualmente moltiplici delle antecedenti A, e C, talchè stia E . A :: F . C; è chiaro per la precedente Proposizione, che E . B :: F . D. Prendansi ora gli ugualmente moltiplici dei conseguenti B, e D, cioè si aggiunga ai medesimi conseguenti un ugual numero di parti simili a quelle, delle quali sono composte le grandezze E, ed F, onde ne risultino altre due grandezze G, ed H; ne verrà, che le due antecedenti grandezze E, ed F saranno o uguali, o ugualmente moltiplici

COROLLARIO. Quindi si osservi, che qualunque volta sono quattro grandezze proporzionali, ancora *convertendo*; cioè presi i conseguenti per antecedenti, e gli antecedenti per conseguenti, saranno pure proporzionali; cioè se $A . B :: C . D$; ancora $B . A :: D . C$ (a); giacchè per la definizione

---

tiplici, o summoltiplici dell' altre due G, ed H, e perciò le ultime due grandezze antecedenti essendo o uguali, o ugualmente moltiplici, o summoltiplici dell' altre due ultime grandezze conseguenti; sarà vero, che $E . G :: F . H$, e saranno conseguentemente queste quattro grandezze *proporzionali*.

Esempio Numerico delle Proposizioni.

Sia $A = 12$; $B = 2$; $C = 30$, $D = 5$ supponendosi quattro grandezze proporzionali. Stia adunque 12 . 2 :: 30 . 5.

Prendansi gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, cioè il duplo di ambedue, che sono il 24 ed il 60; ne verrà per la Proposizione seconda di questo Libro, che starà

24 . 2 :: 60 . 5.

Presi parimente gli ugualmente moltiplici de' conseguenti, cioè il triplo dell' uno, e dell' altro, che sono il 6 ed il 15 (lo che non è altro, che un aggiungere ai conseguenti medesimi un ugual numero di parti simili a quelle degli antecedenti 24, e 60:) si conchiude, che starà 24 . 6 :: 60 . 15.

(a) Ed infatti se è vero, che quattro grandezze allora saranno proporzionali, quando le antecedenti due grandezze sieno ugualmente moltiplici dell' altre due conseguenti; sarà vero altresì, che

do-

PROPOSIZIONE XIII.

FIG. 117. *Se* A *a* B *ha l'istessa proporzione, che* C *a* D, *ma la proporzione dl* C *a* D *sia maggiore di quella di* E *ad* F; *ancora la proporzione di* A *a* B *sarà maggiore di* E *ad* F.

IMperocchè presi gli ugualmente moltiplici degli antecedenti C, ed E; ed altri ugualmente moltiplici de' conseguenti D, F, essendo $C . D > E . F$, potrà essere il moltiplice del primo antecedente $3C$ maggiore del moltiplice $4D$ del primo conseguente; ma il moltiplice $3E$ del secondo antecedente sarà minore del moltiplice $4F$ del secondo conseguente [a]; ma prese ancora $3A$ ugualmente moltiplici di A come $3C$ di C, ed ancora presi $4B$ moltiplici di B, come $4D$ di D, essendo $A . B :: C . D$, siccome $3C > 4D$, così ancora $3A > 4B$; dunque essendo $3E < 4F$, è $A . B > E . F$. a (a) Il che dovea dimostrarsi.

a Defin. 8. Lib. V.

PRO-

(a) Questa Proposizione XIII, dee piuttusto prendersi per un assioma, che per una proposizione da dimostrarsi. Pure per secondare il metodo, che ho già intrapreso;

se A . B :: C . D,
e se D . B > E . F.
anche A . B > E . F.

Supposte le due ragioni di A a B, e di C a D uguali, e perciò fra loro e. g. sestuple; quella poi di E ad F quintupla: siccome la ragion sestupla di

C a D

PROPOSIZIONE XIV.

Essendo A . B :: C . D; *se* A = C; *ancora* B *sarà* = D; *se* A > C, *ancora* B > D; *e se* A < C, *anche* B < D. FIG. 118.

Imperocchè se $A = C$, sarà $A . B :: C . B$ [a]; ma $A . B :: C . D$; dunque $C . B :: C . D$ [b]; e però $B = D$ [c]; se $A > C$, sarà $A . B > C . B$ [d]; onde ancora sarà $C . D > C . B$ [e]; dunque $B > D$ [f]. Similmente se sarà $A < C$, si proverà essere $B < D$; dunque di quattro grandezze proporzionali; secondo che la prima è uguale, maggiore, o minore della terza, ancora la seconda è parimente uguale, maggiore, o minore della quarta. (*a*). Il che ec.

a 7. v.
b 11. v.
c 9. v.
d 8. v.
e 13. v.
f 10. v.

 PRO-

C a D è maggiore della ragione quintupla di E ad F; così ancora la ragione sestupla di A a B dovrà essere maggiore della medesima ragion quintupla di E ad F.

Esempio Numerico.

Essendo 24 . 4 :: 30 . 5,
e 30 . 5 > 60 . 12;
sarà 24 . 4 > 60 . 12.

(*a*) Si supp. I. che A . B :: C . D : 16 . 4 :: 16 . 4:
II. che A = C : 16 = 16.

I. Si dee provare, che B = D . 4 = 4.

Poichè	A . B :: C . B:	(*Pr.* 7. v.
ma	A . B :: C . D;	(*Ipot.*
dunque	C . B :: C . D;	(*Pr.* 11. v.
e perciò	B = D.	(*Pr.* 9. v.

II. Si

PROPOSIZIONE XV.

FIG. 119. *Le parti* E, F *sono proporzionali co' loro ugualmente moltiplici* AD, GK:

IMperocchè divise *AD*, *GK* nelle parti uguali ad *E*, *F* che nella prima sono *AB*, *BC*, *CD*, ciascuna $=E$, e nell' altra sono *GH*, *HI*, *IK*, ciascuna $=F$, sarà $E.F :: AB.GH :: BC.HI :: CD.IK$; dun-

---

II. Si suppone, che $A > C$. $16 > 12$.
Si prova, che $B > D$. $4 > 3$.

	$A . B > C . B$:	(*Pr.* 8. v.
ma	$A . B :: C . D$;	(*Ip.*
dunque	$C . D > C . B$;	(*Pr.* 13. v.
onde	$B > D$.	(*Pr.* 10. v.

III. Si suppone, che $A < C$. $16 < 20$.
Si prova, che $B < D$. $4 < 5$.

	$A . B < C . B$:	(*Pr.* 8. v.
ma	$A . B :: C . D$;	(*Ip.*
dunque	$C . D < C . B$;	(*Pr.* 13. v.
e però	$B < D$.	(*Pr.* 10. v.

Esempio Numerico.

Ip. I.	$16 . 4 :: 16 . 4$:		
essendo	$16 = 16$;	anche	$4 = 4$.
Ip. II.	$16 . 4 :: 12 . 3$:		
siccome	$16 > 12$,	così anche	$4 > 3$.
Ip. III.	$16 . 4 :: 20 . 5$:		
per essere	$16 < 20$,	anche	$4 < 5$.

dunque ancora $E \,.\, F :: AB + BC + CD \,.\, GH + HI + IK$ [a] $:: AD \,.\, GK$ (a). Il che ec. [a 12. 5.]

PROPOSIZIONE XVI.

Se quattro grandezze del medesimo genere sono proporzionali, cioè A . B :: C . D; *ancora* permutando, *cioè paragonando tra loro gli antecedenti, ed i conseguenti* A . C :: B . D, *sono proporzionali*. [FIG. 120.]

IMperocchè prese due ugualmente moltiplici E, F delle due prime A, B, ed altre due G, H ugualmente moltiplici delle due ultime C, D; sarà $E \,.\, F :: A \,.\, B$ [b] $:: C \,.\, D$ [c] $:: G \,.\, H$ [b]; però essendo proporzionali $E \,.\, F :: G \,.\, H$ [c]; se $E = G$, ancora $F = H$; se $E > G$, sarà $F > H$; se $E < G$, ancora $F < H$ [d]; dunque gli ugualmente moltiplici di C, D confrontando con gli ugualmente moltiplici di C, D nell'essere uguale, maggiore, o minore l'uno dell'altro suo corrispondente, sarà $A \,.\, C :: B \,.\, D$ [e], e però

[b 15. V.] [c 11. V.] [d 11. V.] [e Def. 6. V.]

(a) *Esempio Numerico*.

Sia E = 4, F = 5, Supposta A D = 12, dovrà essere GK = 15.. Onde essendo le parti aliqnote 4 e 5. parti simili, ed essendo perciò contenute un ugual numero di volte nelle loro respettive moltiplici grandezze; ne segue, che starà

4 . 5 :: 12 . 15.

e però le grandezze proporzionali, ancora permutando sono proporzionali (a).

PROPOSIZIONE XVII.

FIG. 121. *Se sono proporzionali* AB . BC :: DE . EF, *ancora* dividendo AB—BC . BC :: DE—EF . EF, *cioè* AC . CB :: DF . FE.

SI prendano delle *AC*, *CB*, *DF*, *FE*, le ugualmente moltiplici *GH*, *HI*, *LM*, *MN*; e poi delle

(a) Date le quattro grandezze omogenee proporzionali, cioè sia A . B :: C . D; le antecedenti di questa proporzionalità A, e C, o sono simili parti aliquote delle loro conseguenti B, e D; o sono ugualmente moltiplici delle istesse conseguenti: nell'uno, e nell'altro caso egli è certo per l'antecedente Proposizione, che paragonate le une, e le altre fra loro dovranno essere proporzionali; dunque starà ancora A . C :: B . D. Un tal modo di argomentare chiamasi latinamente *alternando*, o *permutando*. Dunque alternare, o permutare non è altro, che un prendere, o un paragonare un antecedente con un antecedente, ed un conseguente con un conseguente. E questa argumentazione richiede, che tutte e quattro le grandezze sieno omogenee, a differenza dell'altra di sopra addotta, e spiegata, cioè della ragione *inversa*, in cui non è necessaria una tal condizione.

Esempio Numerico.

Sia 16 . 2 :: 8 . 1:

Starà ancora 16 . 8 :: 2 . 1.

delle CB, FE altre ugualmente moltiplici IO, NP. Saranno adunque GI; ed LN ugualmente moltiplici di AB, e DE, come GH di AC, ed LM di DF [a], ed ancora HO sarà moltiplice di CB, come MP di FE [b]; dunque essendo $AB . BC :: DE . EF$, se $GI = HO$, sarà pure $LN = MP$; e se maggiore, o minore sarà GI di HO parimente sarà maggiore, o minore LN di MP; ma se $GI = HO$, tolto di comune HI, sarà $GH = IO$; ed essendo allora $LN = MP$; tolto di comune MN, sarà pure $LM = NP$; e parimente essendo $GI > HO$; sarà $GH > IO$; ed allora essendo pure $LN > MP$, sarà parimente $LM > NP$, e se $GI < HO$, sarà $GH < IO$; onde essendo $LN < MP$, sarà $LM < NP$; dunque GH, ed LM ugualmente moltiplici di AC, e DF, si accordano con IO, ed NP ugualmente moltiplici di CB, ed FE nell'essere uguale, maggiore, o minore l'uno dell'altro; pertanto $AC . CB :: DF . FE$; onde le grandezze, che, composte, erano proporzionali, ancora divise sono proporzionali (a).

a 1. V.

b 2. V.

PRO-

(a) Essendo A B, BC :: DE, E F, dovranno gli antecedenti A B, DE contenere ugualmente in se i loro respettivi conseguenti BC, EF; talchè se AB è tripla di BC; anche DE sarà tripla di EF; onde togliendosi dagli antecedenti istessi AB, DE i suoi conseguenti BC, EF vi rimarranno le grandezze AC, DF duple de' medesimi conseguenti CB, FE; e perciò anche *dividendo* saranno proporzionali, cioè

sarà AC . CB :: DF . FE

Esem-

PROPOSIZIONE XVIII.

FIG. 122. *Essendo le divise grandezze proporzionali, come* AC . CB :: DE . EF; *ancora* composte *saranno proporzionali* AB . BC :: DF . FE.

a 17. v. b 11. v. c 14. v. d *Assiom.* 6.

Altrimenti sia *AB . BG :: DF . FE*: dunque dividendo sarebbe [a] *AG . GB :: DE . EF :: AC . CB* [b]; dunque se fosse *AG* > *AC*, sarebbe *GB* > *CB* [c], il che è impossibile; similmente essendo *Ag* < *AC*, sarebbe *gB* < *CB*; il che pure è assurdo, dovendo essere il tutto maggiore, e non minore d'una sua parte [d]. Dunque stà *componendo* (a) *AB . BC :: DF . FE*.

Co-

Esempio Numerico.

Stando	12 . 4	:: 27 . 9;
sarà ancora	12 — 4 . 4 ::	27 — 9 . 9,
cioè	8 . 4 ::	18 . 9,

Una sì fatta maniera d'argumentare è addimandata da' Latini *dividendo* o *divisio rationis*. *Divisione di ragione* non è altro, che un togliere dagli antecedenti i conseguenti, ed il residuo degli antecedenti medesimi paragonarlo cogl' istessi conseguenti.

(a) *Componendo*, ovvero *Compositio rationis* è così detto da' Latini quel modo di argumentare, che prende gli antecedenti insieme con i conseguenti, e la loro somma la paragona con i conseguenti istessi, e chiamasi *Composizione di ragione*, del tutto opposta alla Divisione di ragione di sopra descritta.

Esem-

COROLLARIO. Quindi può provarsi, che essendo tutta l' *AB* alla parte *BC*, come tutta la *DF* alla parte *FE*; ancora tutta l' *AB* alla residua *AC* è, come tutta la *DF* alla residua *DE*, perchè dividendo [a] sarà *AC.CB::DE.EF*, e convertendo [b] *CB.CA::EF.DE*; dunque componendo [c] *AB . AC :: DF . DE*. Il che si dice *Conversione di ragione* (a), posta però dagl'Interpetri di Euclide per corollario della Proposizione

[a] 17. v.
[b] Cor. Pr. 4. v.
[c] 18. v.

ne

Esempio Numerico.

Supponendosi, che sia 12 . 4 :: 27 . 9,
starà ancora 12+4 . 4 :: 27+9 9.
cioè 16 . 4 :: 36.9.

(a) La *Conversione di ragione* è assai differente dalla *ragione inversa*, o *conversa*, come si denomina da alcuni; Poichè la *Conversione di ragione* non è altro, che un prender che facciamo gli antecedenti per antecedenti; e per conseguenti, la differenza degli antecedenti da' conseguenti.

Supponendo adunque, che sia

AB . BC :. DF . FE,

si dee dimostrare, che starà ancora

AB . AC :: DF . DE.

Poichè stà AB . BC :: DF . FE: (Ipot.
sarà ancora AB—BC : BC :: DF—FE . FE;
cioè AC . BC :: DE : FE; (Pr. 17. v.
ma BC . AC :: FE : DE; (Cor. Pr. 4. v.
dunque BC+AC . AC :: FE+DE . DE,
vale a dire AB . AC :: DF . DE.

Esem-

ne ſeguente, in cui la dimoſtrano ſolo in grandezze dello ſteſſo genere, ſervendoſi della *permutazione* la quale non ſi adatterebbe al paragone di due quantità di genere diverſo dalle loro parti, ed a' loro reſidui, come importa queſta *Converſione di ragione*.

PROPOSIZIONE XIX.

FIG. 123.

Eſſendo tutta l' A B *a tutta la* C D, *come la parte della prima* A E *alla parte della ſeconda* C F, *ancora la rimanente* E B *alla rimanente* F D *ſtarà, come tutta l'* A B *a tutta la* C D, *o come la parte levata* A E *alla parte levata* C F.

Imperocchè eſſendo *AB . CD :: AE . CF*; permutando [a] *AB . AE :: CD . CF*; e dividendo [b]; *EB . AE :: FD . CF*, e di nuovo permutando [a]. *EB . FD :: AE . CF*, o come *AB . CD* [c] (*a*). Il che ec.

a 16. v.
b 17. v.
c 11. v.

PRO-

Eſempio Numerico.

Poſto, che ſia	16 . 4 :: 36 . 9;	
ſarà ancora	16 . 12 :: 36 . 27,	
Poichè ſtando	16 . 4 :: 36 . 9,	(*Ipot.*
ne ſegue, che	16—4 . 4 :: 36—9 . 9,	(*Pr.* 17. v.
cioè	12 . 4 :: 27 . 9	(
ma	4 . 12 :: 9 . 27 :	(*Cor. Pr.* 4. v.
dunque	4+12 . 12 :: 9+27 . 27	(*Pr.* 18. v.
cioè	16 . 12 :: 36 . 27	(
(*a*) Stando	AB . CD :: AE . CF,	
ſtarà ancora	EB . FD :: AE . CF :: AB . CD.	
Poichè ſtà	AB . CD :: AE . CF,	(*Ipot.*
ſarà	AB . AE :: CD . CF;	(*Pr.* 16. v.

onde

PROPOSIZIONE XX.

Se sieno tre grandezze A, B, C *da una parte, e tre altre* D, E, F *da un' altra, e sia* A . B :: D . E; *ed ancora* B . C :: E . F; *se la prima* A *è maggiore, minore, ovvero uguale alla terza* C *da una parte, sarà pure dall' altra banda la prima* D *rispettivamente maggiore, minore, o uguale alla terza* F. FIG. 124.

PErchè se $A > C$, sarà $A . B > C . B$ [a]; ma era $A . B :: D . E$, e convertendo [b] $C . B :: F . E$; dunque $D . L > F . E$ [c], onde ancora $D > F$ [d]. Nell' istessa maniera si proverà, che se sarà $A < C$, ancora $D < F$; e se $A = C$, ancora $D = F$; dunque

a 8. 5.
b Corell. Prop. 4. v.
c 13. v.
d 10. v.

---

onde	AB—AE . AE :: CD—CF . CF ,(	Pr. 17. v.
cioè	EB . AE :: FD . CF ;(	
sicchè	EB . FD :: AE . CF :(	Pr. 16. v.
ma	AB . CD :: AE . CF ;(	Ipot.
dunque	EB . FD :: AB . CD,(	Pr. 11. v.
e perciò	EB . FD :: AE . CF :: AB . CD .	

Esempio Numerico.

Essendo	18 . 15 :: 12 . 10;	
sarà ancora	6 . 5 :: 12 . 10 :: 18 . 15.	
Ed infatti	18 . 15 :: 12 . 10;	(Ipot.
onde	18 . 12 :: 15 . 10:	(Pr. 16. v.
ma	18—12 . 12 :: 15—10.10,(	P. 17. v.
cioè	6 . 12 :: 5 . 10	(
dunque	6 . 5 :: 12 . 10:	(Pr. 16. v.
ma	18 . 15 :: 12 . 10;	(Ipot.
sicchè	6 . 5 :: 18 . 15:	
e perciò	6 . 5 :: 12 . 10 :: 18 . 15.	

que si accordano le prime ad eccedere, mancare, o uguagliare le terze (a). Il che ec.

PROPOSIZIONE XXI.

FIG. 125. *Se l'istesse grandezze fossero talmente disposte, che la prima* A *alla seconda* B *nella prima serie; fosse,*

(a) I. Sia $A > C$: si dee provare, che sarà $D > F$.

	$A . B > C . B$:	(*Pr.* 8. v.
ma	$A . B :: D . E$:	(*Ipot.*
dunque	$D . E > C . B$:	(*Pr.* 13. v.
ma	$C . B :: F . E$;	(*Ip. e Cor. P* 4. v.
sicchè	$D . E > F . E$:	(*Pr.* 13. v.
e però	$D > F$.	(*Pr.* 10. v.

II. Sia $A < C$: si dee provare, che sarà $D < F$.

	$A . B < C . B$:	(*Pr.* 8. v.
ma	$A . B :: D . E$;	(*Ipot.*
dunque	$D . E < C . B$:	(*Pr.* 13. v.
ma	$C . B :: F . E$;	(*Ip. e Cor. P.* 4. v.
sicchè	$D . E < F . E$:	(*Pr.* 13. v.
e però	$D < F$.	(*Pr.* 10. v.

III. Sia $A = C$: si dee provare, che sarà $D = F$.

	$A . B :: C . B$:	(*Pr.* 7. v.
ma	$A . B :: D . E$;	(*Ipot.*
dunque	$C . B :: D . E$:	(*Pr.* 11. v.
ma	$C . B :: F . E$;	(*Ip. e Cor. P.* 4. v.
dunque	$D . E :: F . E$:	(*Pr.* 11. v.
e perciò	$D = F$.	(*Pr.* 9. v.

Esempio Numerico.

Prima Serie;

I.	2 . 6 . 1
II.	2 . 6 . 3
III.	2 . 6 . 2

Se

fosse, come la seconda E *alla terza* F *dell' altra serie; e la seconda* B *alla terza* C *della prima serie fosse, come la prima* D *alla seconda* E *di quell' altra; parimente se* A > C, *anche* D > F: *se* A < C, *anche* D < F; *se* A = C, *ancora* D = F.

SE $A > C$, sarà pure $A.B > C.B$; ma essendo $A.B :: E.F$, e convertendo $C.B :: E.D$, sarà pure $E.F > E.D$, dunque ancora $D > F$ [a]; similmente se $A = C$, sarà $A.B :: C.D$, e però ancora $E.F :: E.D$; dunque ancora $D = F$; e così se fosse $A < C$, si proverebbe $D < F$; dunque si concordano le prime colle terze nell' essere l' una all' altra maggiore, o uguale, o minore (a). Il che ec.

a 10. v.

PRO-

Seconda Serie.

I.	8 . 24 . 4
II.	8 . 24 . 12
III.	8 . 24 . 8

Fatte le due Ipotesi, come nella Proposizione; in tutti e tre questi casi si vede chiaramente la verità della medesima Proposizione, cioè che se nella prima serie il primo termine è maggiore, minore, o uguale al terzo, anche nella seconda serie il primo sarà maggiore, o minore, o uguale al terzo termine.

(a) Sia A > C: si dimostra, che sarà D > F.

	A . B > C . B:	(*Pr.* 8. v.
ma	A . B :. E . F;	(*Ipot.*
dunque	E . F > C . B:	(*Pr.* 13. v.
ma	C . B :: E . D.	(*Ip. e Cor. P.* 4. v.
sicchè	E . F > E . D.	(*Pr.* 13. v.
Dunque	D > F:	(*Pr.* 10. v.

III. Sia

PROPOSIZIONE XXII.

FIG. 126. *Se sieno quante si vogliano grandezze in una serie* A, B, C, D *ed altrettante in un altra* E, F, G, H, *disposte con l' istesso ordine proporzionali, cioè*

A . B

II. Sia A $<$ C: si prova, che sarà anche D $<$ F:

	A . B $<$ C . B:	(*Pr.* 8. v.
ma	A . B : : E . F;	(*Ipot.*
dunque	E . F $<$ C . B:	(*Pr.* 13. v.:
ma	C . B : : E . D;	(*Ip. e Cor. P.* 4. v.
dunque	E . F $<$ E . D;	(*Pr.* 13. v.
e però	D $<$ F.	(*Pr.* 10. v.

III. Sia A $=$ C; sarà anche D $=$ F.

	A . B : : C . B:	(*Pr.* 7. v.
ma	A . B : : E . F;	(*Ipot.*
dunque	E . F : : C . B:	(*Pr.* 11. v.
ma	C . B : : E . D;	(*Ip. e Cor. P.* 4. v.
dunque	E . F : : E . D;	(*Pr.* 11. v.
sicchè	D $=$ F.	(*Pr.* 9. v.

Esempio Numerico.

Prima Serie.

I.	16 . 4 . 8
II.	16 . 4 . 40
III.	16 . 4 . 16

Seconda Serie.

I.	10 . 20 . 5
II.	2 . 20 . 5
III.	5 . 20 . 5

Ammesse anche quì le due ipotesi, come nel dato della Proposizione, in tutti e tre questi casi ci si fa manifesta la medesima verità dimostrata nella precedente Proposizione.

A . B : : E . F ; *e* B . C : : F . G *ed ancora* C . D : : G . H. *e così se ve ne fossero dell' altre ; sarà* per l' ugualità ordinata *la prima all' ultima nella prima serie, come pure la prima all' ultima nella seconda, cioè* A . D : : E . H.

SI piglino 3 *A*, 3 *E* ugualmente moltiplici delle due prime, e 2 *B*, 2 *F* ugualmente moltiplici delle seconde, e 4 *C*, 4 *G* ugualmente moltiplici delle terze. Essendo *A* . *B* :: *E* . *F*, sarà ancora 3 *A* . 2 *B* : : 3 *E* . 2 *F* [a]; ed essendo pure *B* . *C* :: *F* . *G*, sarà ancora 2 *B* . 4 *C* :: 2 *F* . 4 *G*; dunque se 3 *A* è maggiore, minore, o uguale a 4 *C*; sarà pure 3 *E* maggiore, minore, o uguale a 4 *G* [b]; dunque starà *A* . *C* :: *E* . *G*, perchè gli ugualmente moltiplici degli antecedenti si accordano con gli ugualmente moltiplici de' conseguenti; e siccome si è provato essere la prima alla terza della prima serie, come la prima alla terza della serie seconda, così per essere *A* . *C* : : *E* . *G*, ed indi *C* . *D* : : *G* . *H*, si potrà dedurre, essere *A* . *D* :: *E* . *H*; e così sempre la prima all' ultima in una serie starà come la prima all' ultima nell' altra serie, per l' ugualità ordinata (*a*). Il che ec.

a 4. V.

b 10. V.

(*a*) In questa Proposizione, o le grandezze della prima serie sono omogenee alle grandezze della seconda serie, o sono eterogenee.

Se saranno eterogenee, bisognerà valersi della dimostrazione, che ne fa l' Autore.

Se poi sono omogenee, potrà dimostrarsi la Proposizione in tal guisa.

A . B

PROPOSIZIONE XXII.

FIG. 127. *Se in una serie la prima grandezza* A *alla seconda* B *stà, come nell' altra serie la seconda* E *alla terza* F, *indi nella prima sia la seconda* B *alla terza* C; *come nella seconda serie è la prima* D *alla seconda* E: *sarà* per ugualità perturbata *la prima grandezza alla terza di una serie, come la prima alla terza dell' altra serie, cioè* A . C :: D . F.

DElle grandezze A, B, e D sieno ugualmente moltiplici 2 A, 2 B, 2 D, e dell' altre C, E. F sieno ugualmente moltiplici 3 C, 3 E, 3 F. Perchè $A . B :: E . F$, sarà ancora $2A . 2B :: 3E . 3F$ [a], ed essendo $B . C :: D . E$, sarà pure $2B . 3C :: 2D . 3E$ [b]; dunque se $2A = 3C$, ancora $2D = 3F$; se $2A > 3C$, sarà $2D > 3F$; se $2A < 3C$, anche $2D < 3F$ [c]; pertanto sono per ugualità per-

a 15. v.
b 4. v.
c 11. v.

. . . . .	A . B :: E . F;	(*Ipot.*
onde	A . E :: B . F;	(*Pr.* 16. v.
Parimente	B . C :: F . G;	(*Ipot.*
e perciò	B . F :: C . G:	(*Pr.* 16. v.
ma	A . E :: B . F;	(*Per la dim. fatta*
dunque	A . E :: C . G.	(*Pr.* 11. v.

Inoltre	C . D :: G . H;	(*Ipot.*
sicchè	C . G :: D . H,	(*Pr.* 16. v.
ma	A . E :: C . G;	(*Per la dim. fatta*
dunque	A . E :: D . H:	(*Pr.* 11. v.
ed	A . D :: E . H.	(*Pr.* 16. v.

E questa chiamasi da' Latini *Ratio ordinata*, cioè *Ragione, o Ugualità ordinata*.

perturbata proporzionali *A . C :: D . F* (a). Il che ec.

PROPOSIZIONE XXIV.

Se sarà la prima grandezza A *alla seconda* C, FIG. 128.

L *come*

Esempio Numerico.

Prima Serie. 20 . 5 . 10 . 40.
Seconda Serie. 16 . 4 . 8 . 32.
Essendo 20 . 5 :: 16 . 4.
5 . 10 :: 4 . 8,
e 10 . 40 :: 8 . 32:
sarà 20 . 40 :: 16 . 32.

(a) *Altra Dimostrazione.*

A . B :: E . F, (
e B . C :: D . E: (*Ipotesi*

(lo che denota essere l'*ugualità*, o la *ragione perturbata*, detta da' Latini *Ratio perturbata*:)
quindi si dee provare, che sarà

A . C :: D . F.

Aggiunta nella seconda Serie una quarta grandezza G; suppongasi in terzo luogo, che

B . C :: F . G,

Da questa, e dalla seconda ipotesi fatta di sopra ne verrà, che

D . E :: F . G, (*Pr.* 11. v.
e che D . F :: E . G. (*Pr.* 16. v.

Ciò premesso; essendo

A . B :: E . F, (*Ipot.* 1.
e B . C :: F . G; (*Ipot.* 3.
è chiaro, che A . C :: E . G: (*Pr.* 22. v.
ma anche D . F :: E . G; (*Come si è di sopra dedotto*
dunque A . C :: D . F. (*Pr.* 11. v.

Esempio

come la terza D *alla quarta* F, *e la quinta* B *alla seconda* C, *come la sesta* E *alla quarta* F, *sarà ancora la prima con la quinta alla seconda, come la terza con la sesta alla quarta, cioè* A+B . C :: D+E . F.

IMperocchè essendo *A . C :: D . F*, e convertendo *C . B :: F . E*; sarà per l'ugualità ordinata *A . B :: D . E* [a], componendo *A+B . B :: D+E . E* [b]: ma ancora *B.C::E.F*; dunque *A+B.C :: D+E.F* [a], per l'ugualità ordinata (a). Il che ec.

a 22. V.
b 18. V.

PROPOSIZIONE XXV.

FIG. 129.

Sieno quattro grandezze dell' istesso genere proporzionali AB . C :: DE . F; *la massima* AB *con la minima* F *sarà maggiore dell' altre due, cioè* AB+F > C+DE.

SI tagli dalla prima *AB* la parte *AG* = alla seconda *C*, e dalla terza *DE* la *DH* = alla quarta *F*; dunque *AB . AG :: DE . DH*, e permutando

---

Esempio Numerico.

Prima Serie		20 . 5 . 10.
Seconda Serie		8 . 16 . 4.
Essendo	20 . 5 :: 16 . 4,	
e	5 . 10 :: 8 . 16:	
sarà	20 . 10 :: 8 . 4	

(a) *Esempio Numerico.*

Stando	8 . 4 :: 12 . 6,
e	16 . 4 :: 24 . 6;
ne segue, che	8+16 . 4 :: 12+24 . 6,
cioè	24 . 4 :: 36 . 6.

tando [a] tutta l'AB a tutta la DE, come la parte levata AG alla parte levata DH; e però ancora la rimanente GB alla rimanente HE sarà, come tutta l'AB a tutta la DE [b]: ma $AB > DE$; dunque ancora $BG > HE$: sono $GA = C$, ed $HD = F$, onde $AG + F = C + HD$; dunque sono $BG + GA + F > HE + HD + C$, cioè la massima AB con la minima F, maggiore dell' altre due $ED + C$ (a); Il che era da dimostrarsi.

a 16. V.

b 19. V.

(a) Essendo $20 . 5 :: 8 . 2$;
sarà $20 + 2 > 5 + 8$
cioè $22 > 13$.

L 2 ELE-

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE
LIBRO VI. (a)

DEFINIZIONI.

I. Figure rettilinee *simili* si dicono quelle, in cui ciascun angolo dell' una uguaglia quello, che gli corrisponde nell' altra,

(a) Avendo Euclide nel Libro precedente spiegate in generale le Proporzioni; prende in questo ad applicare, e adattare una tal dottrina alle figure piane sì riguardo ai lati, dai quali sono elleno terminate, sì riguardo alle aree, o agli spazj di esse; cominciando da' triangoli, che sono tra le figure rettilinee le più semplici. Quindi passa a determinare le linee proporzionali, come ancora gli accrescimenti, o le diminuzioni proporzionali delle figure. Inoltre ci assegna la Regola detta *Aurea*, o proporzionale, che ha sì grand' uso nell' Arimmetica; e in ultimo dimostra, che nel triangolo rettangolo non solo il quadrato dell'ipotenusa è uguale agli altri due quadrati descritti sopra i di lui rimanenti lati; ma qualunque figura venga descritta sopra l' ipotenusa istessa sarà sempre uguale alle due figure simili descritte sopra i medesimi lati del triangolo.

E' questo Elemento così necessario a sapersi, che senza di esso non possono mai penetrarsi i più rilevanti misteri della Geometria; siccome ancora è talmente vantaggioso, che, al dire del Tacquet, a qualunque proposizione del sesto Libro un distinto elogio richiederebbesi.

altra, e che d' intorno agli uguali angoli hanno i lati proporzionali (a).

II. Diconsi *Reciproche* quelle figure, in cui un lato dell' una ad un lato dell' altra stia proporzionalmente, come un lato di questa seconda ad un lato di quella prima (b).

III.

(a) Così nella Fig. 138. il triangolo ABC sarà *simile* al triangolo DEF, se ciascuno de' tre angoli A, B, C uguagli ciascuno de' tre D, E, F; e sia

AB . DE :: BC . EF,
e BC . DF :: AC . DF.
ed AC . DF :: AB . DE.

Due condizioni pertanto richiedonsi, affinchè le figure possano dirsi *simili*. In primo luogo l'uguaglianza degli angoli, talchè ciascuno degli angoli della prima sia uguale a ciascun altro angolo della seconda figura. In secondo luogo richiedesi, che tali figure abbiano intorno gli angoli uguali i lati proporzionali. Onde se gli angoli dell'una uguaglieranno quelli dell'altra, ma i lati contenenti gli angoli ugnali non sieno proporzionali, o viceversa; in tal caso esse figure non potranno essere simili.

(b) Nella FIG. 149. posto che sia A . B :: C . D, cioè che un lato della prima stia ad un lato della seconda figura, come un altro lato di questa ad un lato di quella; esse figure si chiameranno *Reciproche*. Dal che apparisce, che nella prima figura vi è il termine antecedente della prima proporzione, e il conseguente della seconda proporzione; e nella figura seconda vi è il conseguente della prima proporzione, e l'antecedente della proporziene seconda. Se poi i termini di diverse proporzioni debbano essere intorno ad angoli uguali, questo non ci viene indicato nè dalla definizione, nè avvertito da veruno degl' Interpetri d' Euclide. Sembra però molto verisimile, che si ricerchi anche questa condizione, perchè le figure possano chiamarsi reciproche; come può raccogliersi dalle Proposizioni XIV. e XV. di questo Libro, ove appunto si tratta di tali figure.

Tav. VII. Fig. 130.

III. Una retta AB si dirà segata *secondo l'estrema, e media ragione* in C, se sia tutta ad una parte, come questa parte alla rimanente, cioè $AB \,.\, BC :: BC \,.\, CA$ (a).

IV. L'*Altezza* di qualsivoglia figura è la perpendicolare condotta dalla cima alla base (b).

V. Si dice una proporzione *Composta* di più proporzioni, quando le quantità di queste moltiplicate insieme fanno la quantità di quella (c).

AV-

(a) Dovrà dirsi una linea divisa secondo l'estrema, e media ragione, come vedremo nella Proposizione I. del Libro XIII., ogni qualvolta per la Proposizione XI. del Libro II. si divida in due parti talmente, che il rettangolo formato da tutta, e da una sua parte uguagli il quadrato della parte rimanente. Una sì fatta proporzione, o maniera, onde una linea resta così divisa, fu da alcuni addimandata *divina*, perchè molti, e considerabili sono i vantaggi, che da una tal divisione ritraggonsi. Dicesi poi essa linea segata *secondo l'estrema, e media ragione*, perchè una di lei parte, come sarebbe la C A, tiene il luogo estremo nella proporzione continua; e l'altra parte, com'è la B C, occupa nell'istessa proporzione continua il luogo medio.

(b) Quindi due figure avranno altezze uguali, se le perpendicolari, condotte dal vertice alla base loro, saranno uguali: oppure se le basi, ed i vertici di esse figure saranno, o potranno costituirsi fra le medesime parallele.

(c) Quì è da premettersi, che la *Quantità*, l'*Esponente*, o il *Denominatore* della ragione, è quello, che indica, quante volte il termine antecedente contenga il conseguente: così la quantità di ragione, che ha il 20. al 4. è 5, perchè il 20 contiene cinque volte il 4; e perciò le ragioni uguali diconsi avere la medesima quantità. Ciò premesso, più chiaramente si concepisce questa Definizione V., la quale potrassi esemplificare in tal guisa. La ragione, che ha il 36. al 6., è composta della ragione, che ha il 4 al 2, e della ragione, che ha il 9 al 3. Poichè la quantità della ragion composta è il 6; mentre il 36 contiene sei volte il 6: le quantità poi delle ragioni componenti sono il 2, ed il 3; il 2 perchè il 4 contiene due volte il 2: il 3. perchè il 9. contiene tre volte

il 3;

il 3; onde moltiplicate queste due quantità, cioè il 2 nel 3; formano la quantità di quella, cioè il 6, che era appunto la quantità della ragion composta.

Quindi è manifesto, che, se più saranno le grandezze, la proporzione, che ha la prima grandezza all' ultima, sarà composta delle proporzioni, che hanno le grandezze antecedenti alle sue conseguenti; eccettuata l' ultima: vale a dire la proporzione, che ha la prima grandezza all' ultima, sarà composta di tante proporzioni, quante sono le grandezze, toltone una; onde se tre sieno le grandezze, la proporzione della prima all' ultima grandezza sarà composta di due sole proporzioni intermedie: se quattro di tre proporzioni. Sieno per cagion d' esempio queste grandezze 48, 12, 6, 2. La proporzione del 48 al 2 sarà dunque composta di tre proporzioni; di quella cioè del 48 al 12, del 12 al 6, e del 6 al 2. Poichè la quantità di proporzione o di ragione, che ha il 48 al 2, è il 24: questa quantità nasce dalla moltiplicazione delle altre tre quantità di ragioni, che sono il 4, il 2, ed il 3: il 4, perchè la quantità di ragione del 48 al 12, è 4: il 2, perchè la quantità di ragione del 12 al 6 è 2: il 3, perchè la quantità di ragione del 6 al 2 è 3; le quali tre quantità moltiplicate tra loro danno per prodotto il 24.

A ben riguardare però questa Definizione di Euclide adottata da tutti i Commentatori degli Elementi di lui, dee piuttosto considerarsi come un Teorema, che abbia necessità di dimostrazione, che come una definizione; e tanto è vero, che anche presso di loro medesimi non ha forza di definizione, che di essa non se ne vagliano nel dimostrare le ragioni composte; ma piuttosto si servono d' un' altra definizione che non trovasi in Euclide, ma è ben usata così da lui nel sesto Libro, ed altrove, siccome da tutti gli altri Geometri; ed è la seguente.

Quando saranno due, tre, quattro, o più proporzioni in continui termini omogenei per esempio negli A, B, C, D; la proporzione, che è tra 'l primo termine A, e l' ultimo D, si dirà *composta* di tutte queste date proporzioni, cioè di quella che passa tra A, e B; tra B, e C, e tra C, e D. Lo che altro non significa, se non se tra la proporzione della prima grandezza A alla quarta D vi mediano quelle tre altre proporzioni uniche, e determinate, per mezzo delle quali formasi per necessità quella tal determinata proporzione fra l' estreme A, D.

AVVERTIMENTO.

La quantità delle proporzioni suol prendersi in più modi. Da alcuni s' intende quantità della proporzione il di lei denominatore *per esempio la proporzione dupla ha per denominatore il binario; la tripla il ternario; la sesquialtera una frazione* $\frac{3}{2}$; *e così tutte l' altre proporzioni possono denominarsi da una frazione, in cui l' antecedente sia posto di sopra come numeratore, ed il conseguente al di sotto come denominatore; così i denominatori di più proporzioni se si moltiplicano insieme, ne risulta il denominatore della proporzione composta di quelle; per esempio componendosi la dupla con la tripla, ne risulta la proporzione sestupla, perchè* $2 \times 3 = 6$; *similmente questa proporzione sestupla composta con un' altra proporzione sesquialtera farà la proporzione nonupla, perchè li denominatori di esse moltiplicati insieme* $6 \times \frac{3}{2}$ *fanno* $\frac{18}{2} = 9$; *se poi si dovessero comporre delle proporzioni di quantità incommensurabili, sarà più difficile il trovarne il denominatore, che talvolta non potrà esprimersi nè meno per via di radici quadre, o cubiche ec.*

FIG. 131. *Da altri poi si suppone, che le quantità delle proporzioni, di cui quì tratta Euclide, non sieno altro, che i termini delle medesime: sicchè per comporre le ragioni di* AB *a* CD, *e di* EF *a* GH, *basti moltiplicare insieme gli antecedenti, ed indi i conseguenti tra loro, e tra questi prodotti riuscirà la proporzione di* AB×EF *a* CD×GH, *composta delle date proporzioni* AB *a* CD, *ed* EF *a* GH: *e parimente se si vorrà aggiungervi un' altra ragione di* I *a* K *da comporsi con l' altre, ne risulterà com-*

composta la proporzione di A B × E F × I *a* C D × G H × K*; e così dell' altre. E perchè i termini delle proposte ragioni potrebbero essere tali, che non potessero moltiplicarsi insieme; per esempio se una delle componenti ragioni fosse di due angoli, un' altra di due pesi, una di due tempi ec. allora basterà esprimere quelle date ragioni in linee, o numeri proporzionali a quegli altri termini; che così potranno insieme moltiplicarsi.*

Il modo però, con cui l' istesso Euclide nella Proposizione 23. *di questo Libro sesto si serve della composizione delle proporzioni, mostra doversi avvertire, che se tra due termini* A, B *s' interponga uno, due, o più altri termini del medesimo genere, come* E, F, G; *la ragione degli estremi* A, B *può intendersi composta di tutte le ragioni, che sono fra i prossimi termini, cioè di* A . E, *di* E . F, *di* F . G, *e di* G . B, *perchè infatti* A . B :: A *moltiplicata in* E, *in* F, *e in* G, *all' istessa* B *moltiplicata ne' medesimi termini* E, F, G [a]; *dunque tutti gli antecedenti moltiplicati insieme, a tutti i conseguenti insieme moltiplicati, hanno ragione composta di tutte le ragioni, che a ciascuno antecedente al suo conseguente. E quindi è, che se la prima grandezza alla seconda ha la medesima ragione, che la seconda alla terza, e questa alla quarta, e la quarta alla quinta, e così in una continua serie di Analogìa; dicesi dal medesimo Euclide, che la prima alla terza avrà doppia proporzione della prima alla seconda; e la prima alla quarta ne avrà proporzione tripla ec.* [b]; *per essere quella della prima alla terza composta di due proporzioni uguali; e la prima alla quarta avendo ragione composta di tre uguali proporzioni ec.*

FIG. 131.

a 15. V.

b Defin. 10. e 11. V.

PRO-

PROPOSIZIONE I.

FIG. 133. *I triangoli* ABC, ABD, *ed ancora i parallelogrammi* ABCF, ABDE, *che hanno la medesima altezza, sono tra di loro, come le basi* BC, BD.

POsta *BI* moltiplice in qualunque modo di *BD*, e tirata la retta *IA*, sarà il triangolo *IAB* ugualmente moltiplice di *ABD*, come la base *IB* della base *BD*, perchè essendo le parti *DH*, *HI* uguali à *BD*, congiunta ancora *HA*, saranno i triangoli *HAD*, *IAH* uguali ad *ABD* [a], essendo tra le medesime parallele *DC*, *EF*. Similmente presa *BG* moltiplice di *BC*, sarà, congiunta l' *AG*, il triangolo *ABG* ugualmente moltiplice di *ABC*, come *GB* di *BC*; e secondo che riesca $BG = BI$, ancora sarà $ABG = ABI$; e se $BG > BI$, sarà pure $ABG > ABI$; e se $BG < BI$ ancora $ABG < ABI$; dunque gli ugualmente moltiplici del triangolo *ABC*, e della sua base *BC* si accordano con gli ugualmente moltiplici del triangolo *ABD*, e della sua base *BD*, in uguagliarsi, avanzarsi, o essere avanzati l' uno dall' altro; però il triangolo al triangolo è, come la base alla base [b]. E perchè i parallelogrammi *ABCF*, *ABDE* sono doppj de' triangoli *ABC*, *ABD* [c], però sono nell' istessa ragione di tali triangoli [d]; dunque ancora essi parallelogrammi ugualmente alti sono come le loro basi. (*a*). Il che ec.

a 38. I.
b Defin. 6. V.
c 41. I.
d 15. V.

PRO-

(*a*) I Parallelogrammi, e i Triangoli aventi la medesima altezza, e basi uguali, sono respettivamente tra loro uguali (P. 36. e 38. I.)

Quindi dati due parallelogrammi, che abbiano la medesima altezza, ma che la base del primo sia doppia della base del secondo, ne seguirà, che

PROPOSIZIONE II.

Se nel triangolo ABC *si conduce una linea* DE *parallela alla base* BC, *essa taglierà i lati* AB, AC *proporzionalmente ne' punti* D, E; *e qualunque volta una linea, come* DE *taglierà i lati* AB, AC *proporzionalmente, sarà essa parallela alla base* BC. FIG. 174.

SI tirino le rette *BE*, *CD*; saranno i triangoli *BDE*, *CED* uguali [a], essendo sulla stessa base *DE*, e fra le medesime parallele descritti; dunque *ADE* . *BDE* :: *ADE* . *CED* [b], ed è *ADE* . *BDE* :: *AD* . *BD* [c], essendo triangoli ugualmente alti sopra quelle basi; e similmente *ADE* . *CED* :: *AE* . *EC* [c]; dunque *AD*.*BD*:: *AE* . *EC* [d]. Il che era da dimostrarsi quanto alla prima parte.

a 37. I.
b 7. V.
c 1. VI.
d 11. V.

Quanto alla seconda essendo *AD* . *DB* :: *AE* . *EC*. sarà *ADE* . *BDE* :: *ADE* . *CED* [c]; dunque *BDE*=*CED* [e]; e però le rette *DE*, *BC* sono parallele [f]. Il che era in secondo luogo da dimostrarsi.

e 9. V.
f 39. V.

PROPOSIZIONE III.

Se nel triangolo BAC *l'angolo* A *si divide pel mezzo* FIG. 135.

che il primo sarà doppio del secondo: e l' istesso dovrà dirsi di due triangoli.

Sicchè posto ne' due parallelogrammi, o ne' due triangoli la medesima altezza, avverandosi, che a misura dell' essere la base del primo parallelogrammo, o triangolo, uguale, maggiore, o minore della base del secondo; anche il parallelogrammo, o'l triangolo è uguale, o ugualmente maggiore, o minore dell' altro; si verificherà altresì, che i parallelogrammi, o i triangoli aventi la medesima altezza saranno proporzionali respettivamente alle loro basi.

come la terza D *alla quarta* F, *e la quinta* B *alla seconda* C, *come la sesta* E *alla quarta* F, *sarà ancora la prima con la quinta alla seconda, come la terza con la sesta alla quarta, cioè* A+B . C :: D+E . F.

IMperocchè essendo *A . C :: D . F*, e convertendo *C . B :: F . E*; sarà per l'ugualità ordinata *A . B :: D . E* [a], componendo *A+B . B :: D+E . E* [b]: ma ancora *B.C::E.F*; dunque *A+B.C :: D+E.F*, per l'ugualità ordinata (a). Il che ec.

a 22. V.
b 18. V.

PROPOSIZIONE XXV.

FIG. 139.

Siena quattro grandezze dell' istesso genere proporzionali AB . C :: DE . F; *la massima* AB *con la minima* F *sarà maggiore dell' altre due, cioè* AB+F > C+DE.

SI tagli dalla prima *AB* la parte *AG* = alla seconda *C*, e dalla terza *DE* la *DH* = alla quarta *F*; dunque *AB . AG :: DE . DH*, e permutando

---

Esempio Numerico.

Prima Serie			20	.	5	.	10.
Seconda Serie			8	.	16	.	4.
Essendo	20	.	5	::	16	.	4,
e	5	.	10	::	8	.	16:
sarà	20	.	10	::	8	.	4

(a) *Esempio Numerico.*

Stando	8	.	4	::	12	. 6,
e	16	.	4	::	24	. 6;
ne segue, che	8+16	.	4	::	12+24	. 6,
cioè	24	.	4	::	36	. 6.

tando [a] tutta l'AB a tutta la DE, come la parte levata AG alla parte levata DH; e però ancora la rimanente GB alla rimanente HE sarà, come tutta l'AB a tutta la DE [b]: ma $AB > DE$; dunque ancora $BG > HE$: sono $GA = C$, ed $HD = F$, onde $AG + F = C + HD$; dunque sono $BG + GA + F > HE + HD + C$, cioè la massima AB con la minima F, maggiore dell' altre due $ED + C$ (a); Il che era da dimostrarsi.

[a] 16. v.

[b] 19. v.

(a) Essendo $20 . 5 :: 8 . 2$;
sarà $20 + 2 > 5 + 8$
cioè $22 > 13$.

L 2 ELE-

COROLLARIO. Quindi si ha, che i triangoli equiangoli sono figure simili [a], avendo i lati proporzionali intorno a' loro angoli uguali.

a Def. 1. VI.

PROPOSIZIONE V.

FIG. 137.

Se i triangoli ABC, DEF *hanno i lati proporzionali* AB . BC : : DE . EF, *e* BC . AC : : EF : FD; *avranno ciascun angolo uguale al suo corrispondente, opposto a' lati omologhi.*

FAcciasi l' angolo $FEG = CBA$, e l' angolo $EFG = BCA$; e convenendo le rette EG, FG in G, riuscirà l'angolo $G = BAC$ [b]; dunque essendo equiangolo EGF a BAC, sarà $GE . EF : : AB . BC$ [c] $: : DE . EF$; dunque $GE = DE$ [d]; similmente sarà $GF . EF : : AC . CB$ [c] $: : DF . EF$, e però ancora $GF = DF$ [d]; ed essendo il lato EF comune a' triangoli EGF, EDF, che hanno gli altri lati uguali, però saranno ancora essi equiangoli [e]; dunque essendo EGF equiangolo ad ABC, ancora EDF è allo stesso ABC equiangolo. Il che ec.

b 32. 1.
c 4. VI.
d 9. V.
e 8. 1.

PROPOSIZIONE VI.

FIG. 138.

Se due triangoli ABC, DEF *intorno ad angoli* A = D *abbiano proporzionali i lati* AB . AC : : ED . DF; *saranno ancora gli altri angoli uguali, cioè* B = E, *ed ancora* C = F, *i quali sono sottoposti a' lati omologhi.*

SI ponga nel lato AB la parte $AG = DE$, e la parte AH del lato AC facciasi $= DF$: Congiunta la GH sarà $= EF$ [f], essendo intorno gli

f 4. 1.

gli angoli A, D uguali i lati: ma la GH è parallela a BC [a] (a), e però gli angoli $AGH = ABC$, [a] ed $AHG = ACB$ [b]; dunque il triangolo ABC essendo equiangolo ad AGH, questo ad EDF, sono i triangoli ABC, EDF pure equiangoli. Il che ec.

a 2. VI.
b 29. I.

PROPOSIZIONE VII.

Ne' triangoli ABC, DEF; *se l'angolo* $A = D$, *e intorno agli altri due angoli* B, E *sieno i lati proporzionali* AB . BC :: DE . EF, *e gli altri due angoli* C, F *sieno ambi retti, o tutti e due minori, o ambidue maggiori di un retto; saranno essi triangoli equiangoli.*

FIG. 139.

SE gli angoli C, F fossero retti, sarebbero uguali, ed ancora essendo l'angolo $A = D$, sarebbe pure l'angolo $B = E$ [c]. Dunque sarebbero essi triangoli equiangoli. Se poi sono ambidue gli angoli acuti, o ambedue ottusi, sarà pure l'angolo B uguale all'angolo E; altrimenti se fosse uno di essi maggiore dell'altro, per esempio $ABC > DEF$, fattosi $ABG = DEF$, ed essendo ancora l'angolo $A = D$; sarebbe pure $AGB = F$; onde essendo i triangoli ABG, DEF equiangoli, sarebbe AB

c 32. I.

(a) AB . AC :: DE . DF,
ed AB . AC :: AG . AH; (Ipot.
onde GB . HC :: AG . AH, (Pr. 19. V.
e GB . AG :: HC . AH: (Pr. 16. V.
sicchè AG . GB :: AH . HC; (Cor. P. 4. V.
e perciò la GH è parallela a BC. (Pr. 2. VI.

a 4. 6. be $AB.BG :: DE . EF$ [a], cioè per l'ipotesi
b 6. v. $:: AB . BC$; e però $BG = BC$ [b], e l'angolo BGC
c 5. 1. $= BCG$ [c], e così ambidue minori di un retto, e
d 32. 1. però acuti [d]; onde il conseguente BGA sarà ottuso, ed essendo questo uguale all' angolo F, sarebbe pure l' angolo F ottuso, quando l'angolo C si è provato acuto; onde non sarebbero ambidue maggiori, o ambidue minori di un retto, contro l' ipotesi; non è adunque l'angolo ABC disuguale all' angolo E; onde essi triangoli sono equiangoli, come dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE VIII.

FIG. 140. *Nel triangolo rettangolo* BAC, *se dall' angolo retto* A *si conduce la perpendicolare* AD *sopra l'opposta base* BC, *saranno i triangoli* ADB, CDA *simili tra di loro, ed a tutto il triangolo* CAB.

IMperocchè essendo l'angolo retto $ADB = CAB$, e l'angolo B comune a questi triangoli, ancora il rimanente DAB sarà uguale al residuo ACB; dunque sono equiangoli i triangoli ADB, CAB, e CDA, e però sono simili [e]. Il che ec.

e Coroll. Pr. 4. VI.

COROLLARIO I. Quindi è manifesto, che intorno gli angoli retti de' triangoli simili CDA, ADB saranno proporzionali i lati $CD . DA :: AD . DB$.

COROLLARIO II. E per la similitudine di ciascuno di essi triangoli con l' intero CAB, sarà pure $BC . BA :: BA . BD$, ed ancora $BC . CA :: CA . CD$.

PROPOSIZIONE IX. PROBL.

FIG. 141. *Da una data retta linea* AB *tagliare una parte aliquota (per esempio una terza parte)* AG.

Si

SI tiri dal punto A una retta indefinita AC, in cui presa qualunque parte DA, si replichi in essa secondo il numero della denominazione, che dee avere la parte di AB (in questo caso tre volte, cioè AD, DE, EF); e congiunto il termine F col punto B, si tiri la retta DG parallela ad FB. Sarà AG la terza parte di AB, come AD di AF, essendo $AG . AB :: AD . AF$ a (a).   a 2. VI.

PROPOSIZIONE X. PROBL.

Segare la data retta AB *in* F, G *nell' istessa proporzione, in cui sia divisa un' altra* AC *ne' punti* D, E.   FIG 142.

SI congiunga la BC, e ad essa parallele sieno tirate le DF, EG; è manifesto che sarà $AF . FG :: AD . DE$, ed $AG . GB :: AE . EC$, ed $FG . GB :: DE . EC$, ed $AF . FB :: AD . DC$ [a]. Dunque è divisa AB in F, G nell' istessa proporzione, in cui AC in D, E era segata.

PROPOSIZIONE XI. PROBL.

Alle date due rette AB, BC *trovare la terza proporzionale* BD.   FIG 143.

(a) AD . DF :: AG . GB,   (Pr. 2. VI.
e   DF . AD :: GB . AG: (Cor. Pr. 4. V.
onde DF + AD . AD :: GB + GA . AG,   (Pr. 18 V.
cioè   AF . AD :: AB . AG;
ma   AF è tripla di AD; dunque AB sarà tripla di AG; e perciò dalla retta AB se n'è tagliata una di lei parte aliquota, cioè una terza parte AG.

SI ponga *BC* perpendicolare ad *AB*, e congiunta *AC*, si compisca l'angolo retto *ACD*. Concorrendo la *CD* con l'*AB* prolungata in *D*, sarà *BD* la terza proporzionale dopo le due *AB*, *BC* [a]. Il che ec.

a *Corall.* 1. *Pr.* 8. VI.

PROPOSIZIONE XII. PROBL.

FIG. 144. *Date tre linee* DE, EF, DG *trovare la quarta proporzionale* GH.

INclinate in *D* le rette *DE*, *DG*, si ponga *EF* in diritto alla *DE*; e congiunta *EG*, si tiri a questa dal punto *F* la parallela *FH* segante *DG* prolungata in *H*. Sarà *GH* la quarta proporzionale ricercata, essendo pure *DE*.*EF*::*DG*.*GH* [b]. Il che ec.

b 2. 6.

PROPOSIZIONE XIII. PROBL.

FIG. 145. *Date due rette* AE, EB, *trovare la media proporzionale* EF.

POste per diritto *AE*, ed *EB*, e divisa pel mezzo tutta l'*AB* in *C*, descrivasi col raggio *CA* un semicircolo, e si alzi la perpendicolare *EF* segante la circonferenza in *F*: sarà questa *EF* media proporzionale tra le date *AE*, *EB*; perchè congiunte le rette *AF*, *BF*, l'angolo *AFB* è retto [c]; dunque essendo *FE* perpendicolare alla base del triangolo rettangolo, stà *AE*.*EF*::*EF*.*EB* [a]. Il che dovea ritrovarsi.

c 31. III.

PRO-

PROPOSIZIONE XVI.

Se i parallelogrammi ABCD, EBGF *sono uguali, ed hanno un angolo* ABC = GBE; *saranno i lati di essi reciprocamente proporzionali, cioè* AB . BG :: EB . BC: *e viceversa se intorno gli angoli uguali sono i lati reciprocamente proporzionali; essi parallelogrammi saranno uguali.* FIG. 146.

ESsendo posto il lato *BG* per diritto ad *AB*, sarà pure *EB* per diritto a *BC*, perchè siccome *ABC*, così l'uguale *EBG* con l' altro *CBG* fa due angoli retti [a]; e prolungate le rette *FG*, *DC* convenienti in *H*, sarà pure *CBGH* un parallelogrammo; e perchè *ABCD* = *BEFG*, sarà *ABCD* . *CBGH* :: *BEFG* , *CBGH* [b]: ma la prima ragione :: *AB* . *BG*; e la seconda :: *EB* . *BC*: [c]; dunque *AB* . *BG* :: *EB* . *BC*: e qualunque volta ciò sia, sarà ancora *ABCD* . *CBGH* :: *BEFG* . *CBGH* [c]; dunque sarà *ABCD* = *BEFG* [d]. Il che era da dimostrarsi.

a 34. I.
b 7. V.
c I. VI.
d 9. V.

PROPOSIZIONE XV.

Anche i triangoli uguali ABC, DBE, *in cui l' angolo* B *in ambidue sia uguale, avranno i lati intorno al detto angolo reciprocamente proporzionali, cioè* AB . BE :: BD . BC: *e viceversa se intorno ad un angolo uguale i lati di due triangoli sono reciprochi; saranno essi triangoli uguali.* FIG. 147.

IMperciocchè posta in diritto *BD* a *BC*, riesce pure *BE* per diritto a *BA*, come si è provato ne' parallelogrammi [e]; e congiunta *CE*, essendo

e 14 VI.

 ABC

a 7. v. $ABC = DBE$, sarà $ABC . CBE :: DBE . CBE$ [a]; dunque $AB . BE :: BD . BC$, essendo queste pro-
b 1. vi. porzionali a detti triangoli [b]; e viceversa se $AB . BE :: BD . BC$, sarà pure $ABC . CBE ::$
c 9. v. $DBE . CBE$ [b]; e però $ABC = DBE$ [c]. Il che era da dimostrarsi.

COROLLARIO. Quando ancora l'angolo DBE non
FIG. 148. fosse uguale all' altro ABC, ma però con esso compisse due retti, se i lati sono reciprocamente proporzionali, riescono pure uguali i triangoli; imperocchè essendo $AB . BE :: BD . BC$, posta dall'altra banda la $BF = BD$, e congiunta FE, sarà pure $AB . BE :: BF . BC$; e
d 16. v. permutando [d] $AB . BF :: BE . BC$; dunque
e 2. vi. congiunte le rette AE, FC sono parallele [e], ed
f 37. i. i triangoli ACF, ECF sono uguali [f]; onde
g 38. i. aggiunto FCB, riesce $ABC = EBF$: ma essendo $BF = BD$, sarà $EBF = EBD$ [g]; dunque $ABC = EBD$; e l' istesso riuscirà ne' parallelogrammi, che intorno ad angoli, i quali insieme facciano due retti, abbiano i lati reciprochi; perchè essendo il doppio di detti triangoli, essi pure saranno uguali.

PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 149. *Se quattro rette linee sono proporzionali* A . B :: C . D, *il rettangolo dell' estreme* A = D *uguaglia il rettangolo delle mezzane* BC: *e viceversa se due triangoli* AD, BC *sono uguali, saranno proporzionali i loro lati reciprocamente presi* A . B :: C . D.

Per-

PErchè essendo posti questi lati intorno ad angoli retti saranno i lati reciprochi $A . B :: C . D$; dunque i rettangoli sono uguali: e se tali rettangoli sono uguali, i loro lati debbono essere reciprocamente proporzionali (per la Prop. 14.) Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE XVII.

Se tre linee rette A, B, D *sono proporzionali* A . B :: B . D; *il rettangolo dell'estreme* A D *è uguale al quadrato della mezzana* B: *e viceversa se di tre linee il rettangolo dell'estreme uguaglia il quadrato della mezzana; esse tre linee saranno continuamente proporzionali.* FIG. 150.

SI prenda C uguale alla mezzana B; dunque essendo $A . B :: B . D$, sarà ancora $A . B :: C . D$; onde il rettangolo dell'estreme $AD = BC$ rettangolo delle medie: ma essendo $C = B$, il rettangolo BC uguaglia il quadrato BB; dunque il rettangolo dell'estreme è uguale al quadrato della media: e viceversa se $AD = BB$, sarà $AD = BC$; onde $A . B :: C . D$, cioè essendo $B = C$, saranno continuamente proporzionali $A . B :: B . D$ Il che ec.

PROPOSIZIONE XVIII. PROBL.

Sopra una data retta linea A B *descrivere un rettilineo* A B H G *simile, e similmente posto ad un altro dato* C D F E. FIG. 151.

Si

SI risolva il dato rettilineo $CDFE$ in triangoli CDF, CFE; e sopra la retta AB si faccia l'angolo $ABH = CDF$, e l'angolo $BAH = DCF$, indi l'angolo AHG facciasi $= CFE$, e l'angolo $HAG = FCE$; sarà il rettilineo $ABHG$ simile al dato $CDFE$, perchè i triangoli ABH, CDF saranno equiangoli; dunque intorno all'angolo $B = D$: saranno proporzionali i lati $AB . BH :: CD . DF$; ed essendo l'angolo $BHA = DFC$, ed $AHG = CFE$ sarà pure l'angolo $BHG = DFE$: ed essendo $BH . HA :: DF . FC$; ed $HA . HG :: FC . FE$, per l'ugualità ordinata sarà $BH . HG :: DF . FE$, e similmente si proveranno gli altri angoli di questi poligoni uguali, ed i lati, che gli comprendono, esser proporzionali; dunque sopra la data retta AB si è fatto un rettilineo simile al dato. Il che era proposto.

PROPOSIZIONE XIX.

Tav. VIII. FIG. 152. *La proporzione di due triangoli simili è doppia della proporzione de' loro lati omologhi.*

SIeno due triangoli simili ABC, DEF, ed a due dei loro lati omologhi BC, EF sia BG terza proporzionale [a], e si congiunga GA. Perchè BC a BA stava come EF ad ED, sarà permutando $BC . EF :: BA . ED$: ma $BC . EF :: EF . BG$, dunque $BA . ED :: EF . BG$; onde il triangolo $DEF = ABG$ [b]; e perciò il triangolo ABC al triangolo DEF = starà, come ABC ad ABG, cioè come BG a BC: ma BC a BG ha doppia proporzione di quella, che ha BC ad EF [c]; dunque ABC a DEF

a 11. VI.
b 15. VI.
c Defin. 10. V.

a *DEF* ha proporzione doppia di *BC* ad *EF*: Il che ec. (a);

Corollario. Se saranno dunque tre linee proporzionali, come *BC*; *EF*; *BG*; qualunque triangolo fatto sopra la prima *BC*; ad un simile fatto sopra la seconda *EF*; sarà come la prima *BC* alla terza *BG*.

PROPOSIZIONE XX.

FIG. 153.

I Poligoni simili ABCDE; FGHIK *si dividono in triangoli* ABC, FGH; *ed* ACD; FHI; *ed* ADE; FIK; *uguali di numero omolo-*

(a) Sia BC . EF :: EF . BG (Ipot.
2 . 4 :: 4 . 8;
se noi proveremo, che
ABC . DEF :: BC . BG.
allora i triangoli ABC, DEF saranno in ragione duplicata de' due lati omologhi BC, EF in vigore della Definizione X. del Libro V.

	BC.BA :: FE.ED;	(P.4. VI.
e	BC.FE :: BA.ED:	(P.16 VI.
ma	BC.FE :: FE.BG;	(Ipot.
dunque	BA.ED :: FE.BG;	(P.11.V.
onde	DEF = ABG:	(P.15.VI.
Quindi	ABC.DEF :: ABC.ABG:	(P. 7.V.
ma	ABC.ABG :: BC . BG;	(P. 1.VI.
dunque	ABC.DEF :: BC . BG.	(P.11.V.

Ma la proporzione di BC a BG è doppia di quella di BC a EF (Def. X. V.) dunque anche ABC a DEF sarà in ragion doppia di quella di BC ad EF. Il che ec.

loghi a' medesimi Poligoni (a), *ed agli altri simili triangoli; e qualunque Poligono all'altro simile ha ragione doppia di quella, che ha qualsivoglia lato del primo al lato omologo del secondo.*

IMperciocchè essendo l'angolo B uguale all'angolo G, ed i lati proporzionali $AB . BC :: FG . GH$, tirate le rette AC, FH, i triangoli ABC, FGH riescono simili [a]. Parimente essendo l' angolo $BCD = GHI$, e ne' triangoli simili l' angolo $BCA = GHF$, il rimanente $ACD = FHI$; e perchè $AC . CB :: FH . HG$, ne' triangoli simili e ne' poligoni simili $BC . CD :: GH . HI$; dunque per l' ugualità ordinata [b] $AC . CD :: FH . HI$; e però condotte le rette AD, FI, saranno pure simili i triangoli ACD, FHI; e così pure si proveranno simili gli altri triangoli. E perchè in ciascun poligono condotte le rette da un angolo a tutti gli altri (fuori che a' due prossimi, dove già si stendono i lati del suddetto angolo) ne riescono tanti triangoli, quanti sono i lati del poligono, detrattine due; però ne' poligoni simili, che hanno il medesimo numero de' lati, riesce un numero uguale di simili triangoli. Ed essendo ABC ad FGH in doppia ragione de' lati omologhi CB, HG [c], ed ancora ACD ad FHI in doppia ragione di CD ad HI; siccome ancora ADE ad FIK in doppia ragione di DE ad IK; essendo la medesima ragione $CB . HG :: CD . HI :: DE . IK$, ancora la doppia dell'una è l' istessa, che la doppia di qualsivoglia di esse; però $ABC . FGH :: ACD . FHI :: ADE . FIK$:

a 6. vi.

b 22. v.

c 19. vi.

e come

(a) Cioè un triangolo del primo Poligono stà al triangolo suo corrispondente del secondo Poligono, come il Poligono primo al secondo.

e come uno ad uno, così tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti a, cioè $ABC . FGH :: ABC + ACD + ADE . FGH + FHI + FIK$, cioè come un triangolo d' un poligono ad un simile triangolo dell' altro poligono, così tutto il primo poligono a tutto il secondo. Onde essendo i triangoli ABC, FGH in doppia ragione de' lati omologhi AB, FG; ancora detti poligoni $ABCDE$, $FGHIK$ sono in doppia ragione de' lati omologhi AB, FG (a). Il che ec.

a 22. V.

Corollario. Dunque presa una terza proporzionale a due lati omologhi del primo, e del secondo rettilineo simile, starà il primo rettilineo al secondo, come il lato del primo a quella terza proporzionale presa dopo il primo, ed il secondo lato.

PROPOSIZIONE XXI.

I rettilinei ABC, DEI *simili ad un terzo* HFG, *sono pure simili tra di loro.*

FIG. 154.

Perchè gli angoli A, B, C essendo uguali agli angoli H, F, G, e questi essendo pure uguali agli angoli D, E, I, dunque ancora gli angoli A, B, C sono uguali a' corrispondenti D, E, I; ed essendo $AB . BC :: HF . FG$, ed $HF . FG :: DE . EI$; dunque $AB . BC :: DE . EI$ b; e così ancora le ragioni di altri due lati del rettilineo ABC, e di altri due omologhi del rettilineo DEI, saranno uguali; dunque essi rettilinei simili al terzo HFG, sono pure simili tra di loro. Il che ec.

b 11. V.

PRO-

(a) Quindi si ha, che dato qualunque poligono, e condotte in esso le rette da un angolo a tutti gli altri, fuori che a' due angoli prossimi, ove già si stendono i lati del detto angolo; ne riusciranno tanti triangoli, quanti sono i lati del poligono, toltine due.

PROPOSIZIONE XXII.

FIG. 155. *Se quattro linee sono proporzionali* AB.CD::EF.GH; *i rettilinei simili, e similmente descritti sopra alle prime due* AIB, CKD *sono parimente proporzionali ad altri due rettilinei simili* ELMF, GNOH *descritti sopra all' altre due; e viceversa se quattro rettilinei sopra a quattro linee similmente descritti, a due a due simili, saranno proporzionali; ancora esse linee debbono essere proporzionali.*

IMperocchè essendo la ragione di *AB* a *CD* uguale alla ragione di *EF* a *GH*, la doppia della prima, che è quella del rettilineo *AIB* al suo simile *CKD*; sarà pure uguale alla doppia della seconda, che è quella de' simili rettilinei *ELMF*, *GNOH* a; dunque *AIB*.*CKD*::*ELMF*.*GNOH*: e viceversa essendo proporzionali questi rettilinei, a due, a due simili, sarà la ragione doppia di *AB* a *CD* uguale alla doppia di *EF* a *GH*. che si suppongono i loro lati omologhi; dunque ancora la semplice ragione di *AB* a *CD* è uguale alla semplice ragione di *EF* a *GH*; e però *AB*.*CD*::*EF*.*GH*. Il che ec.

a 20. VI.

PROPOSIZIONE XXIII.

FIG. 156. *I parallelogrammi equiangoli* ABCD, ECGH *hanno tra loro la ragione composta de' lati; cioè di* BC *a* CG, *e di* DC *a* CE.

POngasi per diritto *DC* alla *CE*, riescirà pure *BC* per diritto alla *CG*, essendo l'angolo *BCD*=*ECG*; e compiuto il parallelogrammo

DCGH

DCGH, si faccia come *DC* a *CE*, così *CG* ad un' altra *K*. Il parallelogrammo *ABCD* all'ugualmente alto *DCGH* è, come la base *BC* alla base *CG* [a], ed esso *DCGH* ad *ECGF* è, come *DC* a *CE*, o come *CG* a *K*; dunque per l' ugualità ordinata *ABCD* . *ECGF* :: *BC* . *K*: ma *BC* a *K* è in ragione composta di *BC* a *CG*, e di *CG* a *K* [b]; l' ultima di cui, *CG* . *K* :: *DC* . *CE*; dunque *ABCD* ad *ECGF* ha la ragione composta de' lati *BC* a *CG*, e *DC* a *CE*. Il che ec.

a 1. vi.

b Avvertim. alla Def. 5. vi.

COROLLARIO. Quindi i parallelogrammi equiangoli sono, come il prodotto de' lati del primo al prodotto de' lati del secondo [b].

PROPOSIZIONE XXIV.

In ogni parallelogrammo ABCD, *per qualunque punto* F *del diametro* AC *tirate le parallele a' lati; ne risultano intorno al medesimo diametro parallelogrammi* AEFG, CHFK *tra di loro simili, e simili al tutto.*

FIG. 157.

IMperocchè riescono equiangoli, e però simili tutti i triangoli *AEF*, *ABC*, *FHC*, e gli opposti a questi; dunque *AE* . *EF* :: *AB* . *BC* :: *FH* . *HC*: ed essendo *AG* = *EF*, *AD* = *BC*, *FK* = *HC*, dunque ancora *AE* . *AG* :: *AB* . *AD* :: *FH* . *FK*; dunque tali parallelogrammi sono equiangoli, ed intorno agli angoli uguali hanno i lati proporzionali, e però sono simili al tutto; e fra se stessi. Il che ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XXV. PROBL.

FIG. 158. *Costituire un rettilineo* LMNOP *simile ad un dato* ABCDE, *ed uguale ad un altro dato* F.

FAcciasi il rettangolo *ABIH* uguale al rettilineo *ABCDE* [a], ed alla retta *BI* si adatti pure il rettangolo *IBGK* = *F* [a], e tra le due *AB*, *BG* si trovi la media proporzionale *LM* [b], sopra di cui si descriva il rettilineo *LMNOP* simile al dato *ABCDE* [c], sarà questo stesso uguale ad *F*; imperocchè *ABIH*. *BIKG* :: *ABCDE*. *F* :: *AB*.*BG*: ma ancora *ABCDE*.*LMNOP* :: *AB*.*BG*: (essendo questa ragione doppia della ragione di *AB* alla media *LM*; quale pure è la ragione del rettilineo *ABCDE* al simile *LMNOP* [d]) dunque *LMNOP* = *F* (a). Il che dovea farsi.

a 45. I.
b 13. VI.
c 18. VI.
d 20. VI.

PROPOSIZIONE XXVI.

FIG. 159. *Se nel medesimo angolo* A *del parallelogrammo* ABCD *si descriva un simile parallelogrammo* AEHI *similmente posto; sarà d'intorno al diametro* AH, *che è parte del tutto* AC.

ALtrimenti se fosse come il parallelogrammo *AEFG*, il cui angolo *F* è fuori del diametro *AG*,

(a) ABIH.BIKG :: ABCDE.F:
ma ABIH.BIKG :: AB.BG; (Pr. 1. VI.
dunque ABCDE. F :: AB.BG; (Pr. 11. V.
ma AB BG :: ABCDE.LMNOP; (Cor. P. 20. VI.
sicchè ABCDE . F :: ABCDE.LMNOP, (Pr. 21. VI.
e perciò F = LMNOP. Pr. 9.

AC, sarebbe *AE* . *EF* :: *AB* . *BC* per la similitudine de' parallelogrammi: ma *AB* . *BC* :: *AE* . *EH* per la similitudine de' triangoli *ABC*, *AEH*; dunque sarebbe *AE* . *EF* :: *AE* . *EH*, onde *EF* = *EH*, il tutto alla parte. Il che è impossibile ec.

PROPOSIZIONE XXVII.

Di tutti i parallelogrammi all' istessa linea AB *applicati, con mancanza di parallelogrammi simili, e similmente posti, (come* AFGK*, ed* AHDC *applicati alla retta* AB *con mancanza di parallelogrammi* GKBI, DCBE *tra di loro simili;) il massimo di tutti è* AHDC *descritto sopra* AC*, che è la metà della data* AB*, e riesce ancora simile al suo difetto d' applicazione* BCDE. FIG. 160.

IMperocchè essendo intorno al medesimo diametro *DB* i difetti simili *GKBI*, *DCBE* [a], sarà *NGIE* = *MGKC* [b]; ed aggiunto di comune *KGIB*, riesce *NKBE* = *MCBI* = *MCAF* [c]; ed aggiunto *CMGK*, sarà *AFKG* = *MCBENG*; ma questo è un gnomone minore di *DCBE*, e conseguentemente ancora minore di *AHDC*; dunque *AHDC* è il massimo di tutti. Il che ec.

a 26. VI. b 43. I. c 36. I.

COROLLARIO. Quindi de' parallelogrammi inscritti in un triangolo *ABL*, co' lati paralleli a' lati di esso triangolo, il massimo è *AHDC*, il quale divide pel mezzo tutti i lati *BL*, *AL*, *AB* di esso triangolo [d], siccome *AC* è la metà di *AB*.

d 2. VI.

PROPOSIZIONE XXVIII. PROBL.

Ad una data retta linea AB *adattare un parallele-* FIG. 161.

a 7. V. $ABC=DBE$, sarà $ABC.CBE::DBE.CBE$[a]; dunque $AB.BE::BD.BC$, essendo queste pro-
b 1. VI. porzionali a detti triangoli[b]; e viceversa se $AB.BE::BD.BC$, sarà pure $ABC.CBE::$
c 9. V. DBE,CBE[b]; e però $ABC=DBE$[c]. Il che era da dimostrarsi.

COROLLARIO. Quando ancora l'angolo DBE non
FIG. 148. fosse uguale all' altro ABC, ma però con esso compisse due retti, se i lati sono reciprocamente proporzionali, riescono pure uguali i triangoli; imperocchè essendo $AB.BE::BD.BC$, posta dall' altra banda la $BF=BD$, e congiunta FE, sarà pure $AB.BE::BF.BC$; e
d 16. V. permutando[d] $AB.BF::BE.BC$; dunque
e 2. VI. congiunte le rette AE, FC sono parallele[e], ed
f 37. I. i triangoli ACF, ECF sono uguali[f]; onde
g 38. I. aggiunto FCB, riesce $ABC=EBF$: ma essendo $BF=BD$, sarà $EBF=EBD$[g]; dunque $ABC=EBD$; e l' istesso riuscirà ne' parallelogrammi, che intorno ad angoli, i quali insieme facciano due retti, abbiano i lati reciprochi; perchè essendo il doppio di detti triangoli, essi pure saranno uguali.

PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 149. *Se quattro rette linee sono proporzionali* A . B :: C . D, *il rettangolo dell' estreme* A = D *uguaglia il rettangolo delle mezzane* BC: *e viceversa se due triangoli* AD, BC *sono uguali, saranno proporzionali i loro lati reciprocamente presi* A . B :: C . D.

Per-

PErchè essendo posti questi lati intorno ad angoli retti saranno i lati reciprochi $A . B :: C . D$; dunque i rettangoli sono uguali: e se tali rettangoli sono uguali, i loro lati debbono essere reciprocamente proporzionali (per la Prop. 14.) Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE XVII.

Se tre linee rette A, B, D *sono proporzionali* A . B :: B . D *; il rettangolo dell' estreme* A D *è uguale al quadrato della mezzana* B *: e viceversa se di tre linee il rettangolo dell' estreme uguaglia il quadrato della mezzana; esse tre linee saranno continuamente proporzionali.* FIG. 150.

SI prenda C uguale alla mezzana B; dunque essendo $A . B :: B . D$, sarà ancora $A . B :: C . D$; onde il rettangolo dell' estreme $AD = BC$ rettangolo delle medie: ma essendo $C = B$, il rettangolo BC uguaglia il quadrato BB; dunque il rettangolo dell' estreme è uguale al quadrato della media: e viceversa se $AD = BB$, sarà $AD = BC$; onde $A . B :: C . D$, cioè essendo $B = C$, saranno continuamente proporzionali $A . B :: B . D$ Il che ec.

PROPOSIZIONE XVIII. PROBL.

Sopra una data retta linea A B *descrivere un rettilineo* A B H G *simile, e similmente posto ad un altro dato* C D F E. FIG. 151.

Si

SI risolva il dato rettilineo $CDFE$ in triangoli CDF, CFE; e sopra la retta AB si faccia l'angolo $ABH = CDF$, e l'angolo $BAH = DCF$, indi l'angolo AHG facciasi $= CFE$, e l'angolo $HAG = FCE$; sarà il rettilineo $ABHG$ simile al dato $CDFE$, perchè i triangoli ABH, CDF saranno equiangoli; dunque intorno all'angolo $B = D$: saranno proporzionali i lati $AB . BH :: CD . DF$, ed essendo l'angolo $BHA = DFC$, ed $AHG = CFE$ sarà pure l'angolo $BHG = DFE$: ed essendo $BH . HA :: DF . FC$; ed $HA . HG :: FC . FE$, per l'ugualità ordinata sarà $BH . HG :: DF . FE$, e similmente si proveranno gli altri angoli di questi poligoni uguali, ed i lati, che gli comprendono, esser proporzionali; dunque sopra la data retta AB si è fatto un rettilineo simile al dato. Il che era proposto.

PROPOSIZIONE XIX.

Tav. VIII. FIG. 152. *La proporzione di due triangoli simili è doppia della proporzione de' loro lati omologhi.*

SIeno due triangoli simili ABC, DEF, ed a due dei loro lati omologhi BC, EF sia BG terza proporzionale [a], e si congiunga GA. Perchè BC a BA stava come EF ad ED, sarà permutando $BC . EF :: BA . ED$: ma $BC . EF :: EF . BG$, dunque $BA . ED :: EF . BG$; onde il triangolo $DEF = ABG$ [b]; e perciò il triangolo ABC al triangolo DEF = starà, come ABC ad ABG, cioè come BG a BC: ma BC a BG ha doppia proporzione di quella, che ha BC ad EF [c]; dunque ABC a DEF

a 11. VI.

b 15. VI.

c Defin. 10. V.

a *DEF* ha proporzione doppia di *BC* ad *EF*. Il che ec. [a].

COROLLARIO. Se saranno dunque tre linee proporzionali, come *BC*, *EF*, *BG*, qualunque triangolo fatto sopra la prima *BC*, ad un simile fatto sopra la seconda *EF*, sarà come la prima *BC* alla terza *BG*.

PROPOSIZIONE XX.

I Poligoni simili ABCDE, FGHIK *si dividono in triangoli* ABC, FGH; *ed* ACD; FHI, *ed* ADE, FIK; *uguali di numero omo-lo-* FIG. 153.

(a) Sia BC . EF :: EF . BG (Ipot.
2 . 4 :: 4 . 8;
se noi proveremo, che
ABC . DEF :: BC . BG.
allora i triangoli ABC, DEF saranno in ragione duplicata de' due lati omologhi BC, EF in vigore della Definizione X. del Libro V.

	BC . BA :: FE . ED;	(P. 4. VI.
e	BC . FE :: BA . ED:	(P. 16 VI.
ma	BC . FE :: FE . BG;	(Ipot.
dunque	BA . ED :: FE . BG;	(P. 11. V.
onde	DEF = ABG:	(P. 15. VI.
Quindi	ABC . DEF :: ABC . ABG:	(P. 7. V.
ma	ABC . ABG :: BC . BG;	(P. 1. VI.
dunque	ABC . DEF :: BC . BG.	(P. 11. V.

Ma la proporzione di BC a BG è doppia di quella di BC a EF (Def. X. V.) dunque anche ABC a DEF sarà in ragion doppia di quella di BC ad EF. Il che ec.

BEA, AHC, *rimangono le lunette* BGAEB + CFAHC *uguali al triangolo* BAC. *E se il punto* A *è preso nel mezzo dell' arco* BAC, *esse lunette dall' una, e dall' altra parte essendo tra di loro eguali, ciascuna di esse sarà uguale alla metà del triangolo* BAC, *come fu proposto da Ippocrate Chio.*

PROPOSIZIONE XXXII.

FIG. 166. *Se due triangoli* ABC, DCE *hanno due lati proporzionali, cioè* AB.AC :: DC.DE, *e concorrendo nel punto* C *l' uno, e l' altro triangolo, riescano que' lati omologhi paralleli; saranno gli altri lati* BC, CE *posti per diritto fra loro in una medesima retta linea.*

IMperocchè il parallelismo de' lati omologhi fa l' angolo A, e l' angolo D uguali al terzo alterno ACD; dunque sono essi angoli A, D uguali: ed avendo i lati proporzionali, gli altri angoli pure saranno uguali [a], dunque l' angolo $B = DCE$, ed essendo l' angolo $A = ACD$; dunque $B + A = ECA$: ed aggiunto l' angolo ACB, sono i tre angoli del triangolo ABC uguali agli angoli $ECA + ACB$: e però questi sono pure uguali a due retti, onde fanno una retta linea BCE. Il che ec.

a 6. VI.

PROPOSIZIONE XXXIII.

FIG. 167. *Ne' cerchi uguali* ABI, EFP *gli angoli fatti al centro* BDC, FHG, *ed ancora quelli fatti alla circonferenza* BAC, FEG; *sono proporzionali agli archi* BC, FG, *cui insistono; ed ancora i settori*

BDC,

BDC, FHG *sono come i detti archi, o come gli angoli da loro compresi al centro.*

REplicato l'arco *BC* in *CI*, e l'arco *FG* in *GK*, *KP*; quanto moltiplice è l'arco *BCI* dell'arco *BC*, tanto moltiplice sarà l'angolo *BDI* dell'angolo *BDC*, essendo gli angoli *BDC*, *CDI* uguali, come corrispondenti ad archi uguali [a]: e similmente quanto moltiplice è l'arco *FP* di *FG*, tanto moltiplice è l'angolo *FHP*, dell'angolo *FHG*, mentre agli archi uguali *FG*, *GK*, *KP* corrispondono altrettanti angoli uguali *FHG*, *GHK*, *KHP*. E se l'arco *BI* fosse uguale all'arco *FP*, sarebbe l'angolo *BDI* $=$ *FHP*; se *BI* $>$, o $<$ *FP*, sarà parimente *BDI* $>$, o $<$ *FHP*; dunque *BC* . *FG* :: *BDC* . *FHG*, mentre gli ugualmente moltiplici degli antecedenti si accordano in uguagliare, superare, o mancare dagli ugualmente moltiplici de' conseguenti. Il che primieramente si dovea dimostrare.

Inoltre perchè gli angoli alla circonferenza *BAC*, *FEG* sono la metà di quelli al centro *BDC*, *FHG* [b]; perciò ancora essi essendo proporzionali a questi angoli fatti al centro, saranno pure come gli archi *BC*, *FG*, sopra di cui insistono.

E perchè ancora tirate le corde *BC*, *CI* sono uguali tra loro, e similmente sono uguali le corde *FG*, *GK*, *KP* [c], ed i segmenti, cui le corde uguali sono sottese, tra di loro pure sono uguali [d], siccome ancora uguali sono i triangoli, che hanno le basi uguali, ed i lati uguali; ne segue, che il settore *CDI* $=$ *BDC*, ed il settore *FHG* $=$ *GHK* $=$ *KHP*; onde quanto moltipli-

[a] 27. III.
[b] 20. III.
[c] 29. III.
[d] 24. III.

ce è l'arco BI dell'arco BC, tanto è moltiplice il settore BDI del settore BDC: e similmente quanto moltiplice è l'arco FP dell'arco FG, tanto è moltiplice il settore FHP del settore FHG: che se l'arco BCI è $=$, $>$, o $<$ dell'arco $FGKP$, sarà pure il settore BDI $=$, $>$ o $<$ del settore FHP; dunque il settore BDC al settore FHG è, come l'arco BC all'arco FG, o come l'angolo BDC all'angolo FHG. Il che dovea dimostrarsi

AVVERTIMENTO.

Si tralasciano i Libri VII. VIII. IX. *e* X. *degli Elementi di Geometrìa d'Euclide, perchè di essi i primi tre parlano de' numeri, le cui proprietà appartengono all' Aritmetica, e l' altro discorre delle linee incommensurabili, cioè che non hanno tra di loro veruna misura comune, le quali più brevemente, e più chiaramente potrebbero osservarsi col calcolo dell' Analitica. Per ora basta avvertire, che le quantità commensurabili avendo qualche misura comune, che può prendersi per unità, sono proporzionali a' numeri, i quali sempre si misurano dall' unità, compresa alquante volte in uno, e certe altre volte in qualunque altro numero; ma le quantità continue possono essere incommensurabili, essendo proporzionali non a' numeri, ma alle radici quadrate, cubiche, biquadratiche ec. di numeri non quadrati, nè cubi, nè biquadrati ec.*

Così il diametro d' un quadrato è incommensurabile al lato di esso, a cui stà, come la radice quadra di 2, *ad* 1. *La perpendicolare d'un triangolo equilatero stà al lato di esso, come la radice quadra di*

3 a 2, le quali sono radici irrazionali, però queste si dicono incommensurabili in lunghezza, non in potenza. Che se tra due linee, le quali sieno tra di loro, come l' unità ad un numero non quadrato; nè cubico, per esempio come 1 a 7, si prendano due linee medie proporzionali; saranno queste $\sqrt[3]{7}$, *e* $\sqrt[3]{49}$; *cioè come la radice cubica di 7, e come la radice cubica di 49, le quali paragonate alle date due linee, che erano, come 1 a 7, riescono incommensurabili ad esse non solo in lunghezza, ma ancora in potenza quadrata; e prese tra esse più medie proporzionali, possono essere incommensurabili ancora in potenza cubica, ed in altre di grado maggiore.*

Però essendo più necessario di tali osservazioni l' esame delle figure solide, di cui tratta Euclide nel Libro XI., e XII. de' suoi Elementi, perciò dopo il sesto libro si fa passaggio all' undecimo, come da altri Mattematici si è stimato opportuno di fare.

PRE-

PREFAZIONE
AL LIBRO XI.
DEGLI ELEMENTI
DI EUCLIDE.

ESsendosi fin quì trattato delle linee, e delle figure, che formano i primi due generi della quantità *continua*, debbesi ora parlare dei solidi, o de' corpi, che a differenza delle linee, e delle superficie o figure hanno tre dimensioni, lunghezza cioè, larghezza, ed altezza, e costituiscono il terzo, ed ultimo genere delle grandezze.

Il nostro Autore passa dal Libro VI. all'XI. per le ragioni, che egli adduce nell' Avvertimento premesso a questo Libro, e per non interrompere eziandio con altri trattati gli Elementi Geometrici: i quali sarebbero manchevoli, ed imperfetti, qualunque volta egli omettesse, e questo, ed il seguente Libro, come altri Geometri han fatto. I Libri de' solidi gli dobbiamo principalmente ad Aristeo, ad Isidoro, ad Issicle Geometri di sottilissimo ingegno.

Questo Libro XI. è come di due parti composto: nella prima si propongono i principj, e si piantano i fondamenti, sopra de' quali si appoggia tutta quanta la dottrina de' solidi: nella seconda parte si assegnano, e dimostransi le proprietà dei parallelepipedi, cioè di quei solidi, che sono compresi da piani, o superficie quadrilatere parallele insieme, ed opposte. E' certamente senza la cognizione di questo Libro le proprietà de' corpi ci sarebbero del tutto ignote; e senza la scienza de' solidi tutte quasi le parti della Mattematica sarebbero mancanti. Ed invero la Dottrina sferica di Teodosio, la Trigonometrìa parimente sferica, una gran parte della Geometrìa Pratica, della Statica, e della Geografia son fondate sopra una tale scienza. Inoltre quello, che vi ha di più difficile nella Gnomonica, nelle sezioni Coniche, e nell' Astronomìa, nella Prospettiva, e in tutta l'Ottica, più facile, e più chiaro ci si rende, qualora noi abbiamo ben concepiti i principj de' solidi, quali ora propongonsi, e se ne porge de' medesimi, ove abbisogni, la conveniente spiegazione.

ELEMENTI DELLA GEOMETRIA DI EUCLIDE

LIBRO XI.

DEFINIZIONI.

I. CHiamasi Corpo Solido quello, che ha l'estensione in lunghezza, in larghezza, ed in grossezza. (a)

II. I Termini di qualunque solido, da' quali è compreso, sono le superficie (b). TAV. IX. FIG. 168.

III. Una Linea Retta *AB* dicesi Perpendicolare al piano *FCE*, quando con tutte le linee *BF*, *BD*, *BC*, *BE* tirate dal suo termine *B* in detto piano, faccia gli angoli retti *ABF*, *ABD*, *ABC*, *ABE*.

IV. Il Piano *HIE* dirassi perpendicolare al Piano *FCE*, se qualunque retta *AB*, condotta in uno di essi piani perpendicolare alla comune sezione *GE* di ambidue i piani, riesca pure all'altro piano *FCE* perpendicolare.

V. L'Inclinazione della Retta *AD* al piano *FCE* è l'angolo *ADB*, che risulta, se da un punto FIG. 169.

(a) Osservisi la Fig. 179. della Tav. IX., ove la retta AD è la lunghezza, DF la larghezza, la DE la profondità, o l'altezza del solido ABCFED.

(b) Tali superficie si chiamano *Perimetro*, o *Contorno* del solido.

punto ſublime *A* di eſſa linea, tirata la perpendicolare *AB* ſopra eſſo piano, ſi tirerà nel medeſimo piano la retta *BD*, che congiunge i termini d' ambedue queſte linee.

FIG. 170. VI. L'INCLINAZIONE DEL PIANO *GFCH* AL PIANO *FCE* è l' angolo acuto *ADB* compreſo da due rette linee *DA*, *DB* tirate dal medeſimo punto *D* della comune ſezione *FC* di ambi i piani, in ciaſcuno di eſſi perpendicolare all' iſteſſa ſezione, di maniera che ſieno retti gli angoli *ADC* e *BDC*.

VII. Due piani ſi diranno UGUALMENTE, o SIMILMENTE INCLINATI, come due altri piani, quando l' angolo dell' inclinazione de' due primi ſarà uguale all' angolo dell' inclinazione degli altri.

VIII. Piani tra di loro PARALLELI ſono quelli, che in infinito continuati mai converrebbero inſieme.

IX. Le FIGURE SOLIDE SIMILI ſono quelle, che da piani ſimili, uguali di numero, e con uguale ordine diſpoſti; ſono contenute.

X. UGUALI, e SIMILI ſaranno quelle figure ſolide, che da ſimili, ed uguali piani, nell' iſteſſo numero, e col medeſimo ordine ſaranno compreſe.

XI. ANGOLO SOLIDO è l' inclinazione di più di due linee non poſte nel medeſimo piano, e concorrenti in un medeſimo punto; oppure è il concorſo di più di due angoli piani non poſti nel piano medeſimo, e terminati in un ſolo punto.

XII. La PIRAMIDE è una figura ſolida compreſa da più piani convenienti in un punto, e dal piano

no opposto a tale punto, in cui convengono i detti piani.

XIII. Il PRISMA è una figura solida compresa da due piani paralleli, simili, ed uguali, e similmente posti, e da altri piani parallelogrammi, compresi, e da' lati de' piani opposti, e dalle linee, che ne connettono gli angoli dell' uno e dell' altro.

XIV. La SFERA è una figura solida nata dalla rivoluzione d'un semicircolo intorno al suo diametro tenuto fisso, finchè ritorni al medesimo sito d' onde cominciò a muoversi.

XV. Esso diametro fisso dicesi l'ASSE della sfera.

XVI. Il CENTRO della sfera è quel medesimo punto, che serviva di centro al semicircolo genitore.

XVII. Il DIAMETRO di essa sfera è qualunque linea retta, che passa pel centro, e termina dall' una, e dall' altra parte alla superficie sferica.

XVIII. Il CONO si descrive dalla rivoluzione di un triangolo rettangolo intorno ad uno de' lati contenenti l'angolo retto, il quale rimanga fermo, finchè girando la figura triangolare ritorni al medesimo sito, d' onde cominciò a muòversi. E se il lato fisso è uguale all'altro intorno all'angolo retto, dirassi il Cono ORTOGONIO, cioè RETTANGOLO: se è minore quello di questo, dirassi AMBLIGONIO, cioè OTTUSIANGOLO: e se maggiore, dirassi OXIGONIO, cioè ACUZIANGOLO.

XIX. Quel lato fisso, intorno a cui gira il Triangolo, si dirà ASSE del Cono, generato da esso.

XX. Il cerchio descritto dal lato, che gira, si dice BASE di esso Cono.

XXI.

XXI. Stando fermo un lato di qualche rettangolo, rivolto intorno ad esso, fino che ritorni al primiero sito, la figura da ciò descritta si dice CILINDRO.

XXII. L'ASSE del Cilindro è quella linea fissa, intorno a cui girando il rettangolo, la descrive.

XXIII. I cerchi descritti dagli altri due lati opposti di esso rettangolo, sono le BASI di esso Cilindro.

XXIV. I Coni, ed i Cilindri SIMILI sono quelli, che hanno gli assi, ed i diametri delle basi tra di loro proporzionali; come descritti da triangoli, o rettangoli simili, e similmente mossi.

XXV. Il CUBO è una figura solida contenuta da sei quadrati uguali. (a)

XXVI. Il TETRAEDRO, che è una Piramide regolare, è una figura solida contenuta da quattro triangoli uguali, ed equilateri.

XXVII. L'OTTAEDRO è una figura solida compresa da otto triangoli uguali, ed equilateri.

XXVIII. Il DODECAEDRO è una figura solida contenuta da dodici Pentagoni uguali, equilateri, ed equiangoli.

XXIX. L'ICOSAEDRO è una figura solida compresa da venti triangoli uguali, ed equilateri.

XXX. Il PARALLELEPIPEDO è la figura solida contenuta da sei parallelogrammi, di cui gli opposti sono paralleli, ed uguali.

PRO-

(a) Vi sono da considerare alcuni solidi che si addimandano *regolari*.

Solido regolare è quello, che è compreso da piani 1. uguali, 2. equilateri, 3. equiangoli.

Tali solidi sono cinque; il Tetraedro, il Cubo, l'Ottaedro, il Dodecaedro, l'Icosaedro.

PROPOSIZIONE I.

Di una linea retta non può essere una parte BD *in un piano* ECF, *ed un' altra parte di essa* DA *sollevata dal medesimo piano* (a).

FIG. 171.

Altrimenti prolungata la *BD* in *G* nell' istesso piano, converrebbero due rette linee *GB*, *AB* in una porzione comune *DB*; il che è impossibile ; dunque della linea retta non è parte nel soggetto piano, e parte in un altro elevato da esso. Il che ec.

a Assiom. 10. lib. 1.

PROPOSIZIONE II.

Se due linee rette AB, CD *si segano in* E, *stanno in un medesimo piano; ancora qualunque triangolo* DEB *consiste in un piano stesso*.

FIG. 172.

Imperocchè se la parte *FEG* del triangolo fosse in un piano, ed il resto *FDBG* in un altro, della retta *ED* la parte *EF* sarebbe in un piano, e l' altra parte *FD* fuori di esso sarebbe sollevata, il che è impossibile b; dunque il triangolo *DEB* è in un istesso piano, e così ancora le rette *ED*, *EB* sono in esso, nè le porzioni loro *CE*, *DE* possono essere sollevate dal medesimo piano; e però le rette *DB*, *CD*, che si segano, stanno in un medesimo piano. Il che ec.

b 1. XI.

PRO-

(a) Poichè in primo luogo si distruggerebbe la natura della linea retta già supposta, e del piano, o della superficie; e di più ne seguirebbe l' assurdo indicato nella dimostrazione indiretta della Proposizione.

PROPOSIZIONE III.

FIG. 173. *Se due piani* ABG, ECF *si segano; la loro comune sezione* HD *è una linea retta.*

ALtrimenti si potrà tirare nel piano *ABG* la retta *HKD*, e nell'altro *ECF* la retta *HID*, le quali due rette linee comprenderebbero uno spazio, il che è impossibile [a]; dunque la comune sezione è la retta linea *HD* (a). Il che ec.

a *Assiom.* 9. 1.

PROPOSIZIONE IV.

FIG. 174. *Se la retta* AB *è perpendicolare a due linee rette* CD, EF *che si segano in* B, *sarà ancora perpendicolare al piano che passa per dette linee.*

SI tiri per l'istesso punto *B* un'altra linea *GBH*, e poste *BC*=*BD*, e *BF*=*BE*, si congiungano le rette *CE*, *FD* seganti la retta *GH* in *G*, ed *H*; indi da un punto sublime *A* della retta *AB* si tirino le rette *AC*, *AE*, *AF*, *AD*, *AG*, *AH*. Ne' triangoli *CBE*, *DBF* essendo intorno l'angolo uguale alla cima *B* ancora i lati *CB*, *BE* uguali a' lati *DB*, *BF*, sarà la base *CE* = alla base *DF*, e gli altri angoli uguali; e però ne' triangoli *CBG*, *DBH* essendo l'angolo *BCG* = *BDH*, e l'angolo *CBG*=*DBH*, ed il lato *CB* =*BD*; sarà ancora il lato *CG*=*DH*, e l'altro *BG*=*DH* [b]. Similmente ne' triangoli *CAB*, *DAB* es-

b 26. 1.

(a) Se HD non fosse retta, potrebbesi da' punti H, D nel piano ABG tirare la linea retta HKD, e nell'altro ECF la retta HID; sicchè dagl' istessi punti H, D si tirerebbero due linee rette diverse, il che è impossibile.

essendo $CB = BD$, ed il lato AB comune, e gli angoli retti in B uguali, sarà la base $AC = AD$; e con simil ragione si proverà ne' triangoli ABE, ABF essere $AE = AF$. Dunque ne' triangoli ACE, ADF essendo ciascun lato dell'uno uguale a ciascun lato dell'altro, saranno ancora gli angoli corrispondenti ACE, ADF uguali [a]; onde ne' triangoli ACG, ADH; vi sono i lati AC, AD, ed i lati CG, DH uguali intorno a' detti angoli uguali ACG, ADH; e però la base $AG = AH$; e finalmente ne' triangoli AGB, AHB essendo tutti i lati dell'uno uguali a tutti i lati dell'altro, cioè $BG = BH$, ed AB comune, ed $AG = AH$; dunque l'angolo $ABG = ABH$ [a]; i quali però sono retti; onde la linea AB con tutte le linee condotte per lo punto B nel piano, che passa per le rette CD, EF, facendo angoli retti, è perpendicolare a detto piano [b]. Il che era da dimostrarsi.

a 8. I.

b Defin. 6. XI.

PROPOSIZIONE V.

Se la retta AB *è perpendicolare a tre linee rette* BC, BD, BE; *queste tre linee saranno in un medesimo piano.* FIG. 175.

ALtrimenti il piano, che passa per le due BC, BD segherebbe il piano condotto per le due AB, BE in un' altra retta linea BF, comune sezione di entrambi; onde la retta AB, che è perpendicolare alle due BC, BD, farebbe angolo retto ancora colla BF esistente nell' istesso piano CBD [c]; dunque nel piano ABF sarebbe l'angolo retto EBD uguale al retto FBD, la parte al tutto; il che è im-

c 4. XI.

impossibile; dunque la *B E* era nell' istesso piano dell' altre due *B C*, *B D*, e non sollevata da esso (a). Il che ec.

PROPOSIZIONE VI.

FIG. 176. *Se le due rette linee* A B, C D *sono perpendicolare al piano* B E D; *saranno fra di loro parallele*.

Congiungasi la *B D*, e ad angolo retto *B D E* si tiri nell' istesso piano la *D E* = *A B*, e si congiungano le rette *B E*, *E A*, *A D*. Essendo intorno agli angoli retti *A B D*, *B D E* il lato *D B* = *E D*, ed il lato *B D* comune, sarà la base *A D* = *B E*; dunque ne' triangoli *A D E*, *A B E* essendo *A D* = *E B*, *D E* = *B A*, e la base *A E* comune, l' angolo *A D E* = *A B E*, cioe retto; onde la *A D* facendo angolo retto colle tre linee *B D*, *A D*, *C D*, però queste sono in un medesimo piano [a] : ma nel piano delle due *B D*, *A D* è ancora l' *A B*, che fa con esse un triangolo [b]; dunque le due rette *A B*, *C D* sono in un medesimo piano, ed essendo i due angoli interni *A B D*, *C D B* retti, esse linee sono parallele. Il che ec.

a 5. XI.
b 2. XI.

PRO-

(a) Se non è possibile, che le tre linee BC, BD, BE posino in un medesimo piano; sia la BE in un altro piano ABF, il quale seghi colla linea BF il piano, ove posano le altre due linee BC, BD. Siccome la BA insiste perpendicolarmente sopra le due BC, BD (*Ipotesi*); dovrà essere perpendicolare ancora alla linea BF, che è comune sezione d' ambedue i piani, e che perciò posa sul piano, ove ritrovansi l' altre due linee BC, BD. Quindi è manifesto, che l' angolo ABF sarà retto. Ma anche l' angolo ABE è retto (*Ipotesi*); dunque l' angolo ABF dovrebbe essere uguale ad ABE, il tutto alla parte, il che è impossibile. Dunque la BE era nell' istesso piano dell' altre due BC, BD, e non è sollevata dal medesimo.

PROPOSIZIONE VII.

La retta A C, *che congiunge due punti* A, C *di due linee parallele* AB, CD, *è nel medesimo piano di esse.* FIG. 177.

PErchè se si sollevasse in un altro piano, come *AEC*, questo continuato segherebbe il piano delle parallele nella retta *AC* [a]; dunque due rette linee *AEC*, ed *AC* comprenderebbero spazio, il che è impossibile [b].

a 3. XI.

b *Assiom.* 9. I.

PROPOSIZIONE VIII.

Essendo le due rette A B, CD *parallele, se una di esse* AB *è perpendicolare al piano* BED; *ancora l'altra* CD *gli sarà perpendicolare.* FIG. 176.

SI faccia la costruzione, come nella *Proposizione* VI., e con la stessa dimostrazione si proverà essere angoli retti *EDA*, *EDB*; onde la *ED* è perpendicolare al piano di esse parallele, onde ancora è retto l'angolo *CDE*: ma anche l'angolo *CDB* è retto, essendo l'angolo *ABD* dell'altra parallela pur retto; dunque ancora la *CD* è perpendicolare allo stesso piano. Il che ec.

PROPOSIZIONE IX.

Se le linee rette AB, CD *sono parallele ad una terza* EF *posta fuori del loro piano; saranno pure esse tra loro parallele.* FIG. 178.

PIglisi nella retta *EF* un punto *G*, da cui nel piano delle due parallele *AB*, *EF* si tiri la

per-

perpendicolare *GH*, e nel piano delle parallele *EF*, *CD* la perpendicolare *GI*; dunque essendo gli angoli *EGH*, *EGI* retti, è la *EG* perpendicolare al piano *HGI*; dunque ancora le *AB*, e *CD* parallele alla *EG* sono all'istesso piano perpendicolari [a], e però sono tra di loro parallele [b]. Il che era da dimostrarsi.

a 8. xi.
b 6. xi.

PROPOSIZIONE X.

FIG. 179.

Se due rette AB, CB *concorrenti in* B *sono parallele a due altre* DE, FE *convenienti in* E *fuori del medesimo piano* ABC; *saranno gli angoli* ABC, DEF *tra loro uguali*.

POngasi *ED*=*BA*, ed *EF*=*BC*; congiunte le rette *AD*, *BE*, *CF* saranno uguali, e parallele [c]; dunque ancora congiunte le due *AC*, *EF* riescono eguali; onde tutti i lati del triangolo *ABC* uguagliando i lati dell'altro *DEF*, sarà l'angolo *ABC*=*DEF*. Il che ec.

c 33. I.

PROPOSIZIONE XI. PROBL.

FIG. 180.

Da un punto sublime A *tirare la retta* AB *perpendicolare al soggetto piano*.

SI tiri in esso piano qualunque retta *GD*, a cui dal punto *A* si mandi la perpendicolare *AC*, ed all'istesso *GD* si alzi dal punto *C* la perpendicolare *CB* nel medesimo piano; indi sopra la *CB* dal punto *A* tirando la perpendicolare *AB*, sarà questa perpendicolare al soggetto piano; imperocchè tirata per *B* la *FBE* parallela a *GD*, siccome *GC* facendo l'angolo retto colla *CA*, e

colla

colla *C B*, e perpendicolare al piano *A C B*, così ancora la *F B* sarà perpendicolare al medesimo piano [a]; dunque l'angolo *A B F*, e l'angolo *A B C* sono retti, e però l'*A B* è perpendicolare al soggetto piano. Il che ec.

a 8. XI.

PROPOSIZIONE XII. PROBL.

FIG. 181.

Dal punto C *posto nel piano* E F G *alzare la* C D *perpendicolare a detto piano.*

DA qualunque sublime punto *A* si tiri al piano la perpendicolare *A B* [b], e congiunta la *B C*, si tiri nel piano *A B C* la *C D* parallela ad *A B*; questa sarà pure perpendicolare al piano [c]. Il che ec.

b 11. XI.

c 8. XI.

PROPOSIZIONE XIII.

FIG. 182.

Dal medesimo punto B *non possono essere alzate al piano* E F G *due perpendicolari* B A, B C *verso la medesima parte.*

PErchè il piano, che passa per le due *A B*, *C B*, segando il piano soggetto *E F G* nella retta *B D*, sarebbero uguali gli angoli retti *A B D*, *C B D*, cioè la parte al tutto; il che è impossibile; dunque ec.

PROPOSIZIONE XIV.

FIG. 183

Se la retta A B *è perpendicolare a due piani* C D, E F, *questi saranno paralleli.*

IMperocchè se prolungati convenissero in una retta linea *H G*, preso in essa un punto *I* e con-

dotte in ambi i piani le rette *IA*, *IB*, si farebbe un triangolo, in cui due angoli *BAI*, *ABI* sarebbero due retti; il che è impossibile a; dunque essi piani sono paralleli.

a 17. 1.

PROPOSIZIONE XV.

FIG. 184.

Se due rette linee A G, A D *congiunte in* A *sono parallele a due linee* E F, E C *poste in un altro piano; i due piani* D A G, C E F *saranno paralleli.*

COnducasi dal punto *A* sopra al piano *CEF* la perpendicolare *AB*, e si tirino in esso piano le *BI*, *BH* rette linee parallele alle *EF*, *EC*, e conseguentemente saranno parallele alle *AG*, *AD*; dunque essendo retti gli angoli *ABI*, *ABH*, saranno pure gli angoli *BAG*, *BAD* retti, e però l'*AB* sarà perpendicolare ancora al piano *DAG*; dunque sono questi due piani paralleli c. Il che ec.

b 9. XI.

c 14. XI.

PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 185.

Se due piani paralleli A B, C D *sono segati da un altro piano* H E G F, *i loro comuni segamenti* E H, G F *sono due rette parallele.*

IMperocchè, se prolungate convenissero in *I*, sarebbero parte ne' piani paralleli, e parte fuori di essi, (perchè ivi non convengono i piani equidistanti) il che è impossibile d. Dunque tali comuni sezioni sono parallele.

d 1. XI.

PROPOSIZIONE XVII.

FIG. 186.

Se due rette A E B, C F D *sono segate da piani pa-*

paralleli HI, KL, MN; *saranno da essi tagliate proporzionalmente.*

SI tiri nel piano *HI* la retta *AC*, nel piano *MN*, la *BD*, e congiunta la *CB* seghi il piano *KL* in *G*, indi si tirino in esso le rette *GE*, *GF*. Il piano del triangolo *ACB* ha i comuni segamenti de' piani paralleli *AC*, *EG* tra loro paralleli [a], e similmente il triangolo *CBD* fa le sezioni *GF*, *BD* parallele; dunque *AE*.*EB*::*CG*.*GB* [b] :: *CF*. *FD*; onde sono proporzionalmente segate le rette *AB*, *CD* da essi piani paralleli. Il che ec.

a 16. XI.
b 2. VI.

PROPOSIZIONE XVIII.

FIG. 187.

Se la retta AB *è perpendicolare al piano* CD, *qualunque piano* EF, *che passi per essa linea, sarà perpendicolare al piano soggetto.*

SIa la *EG* la comune sezione di detti piani, e da qualunque punto *H* di essa si tiri nel piano *EF* la *HI* parallela ad *AB*. Sarà questa pure al piano *CD* perpendicolare [c]; dunque esso piano *EF* sarà perpendicolare al piano *CD* [d]. Il che ec.

c 8. XI.
d Def. 4. XI

PROPOSIZIONE XIX.

FIG. 188.

Se due piani CGD, EHF *perpendicolari al soggetto piano* GKH *si seghino nella retta* AB; *sarà questa perpendicolare al soggetto piano.*

IMperocchè essa *AB* sarà perpendicolare alle due comuni sezioni *EH*, *GD* di essi piani *EF*,

CD col piano soggetto *EK*; altrimenti se nel piano *EF* fosse *BL* perpendicolare ad *EH*, e nell' altro *CD* fosse *BI* perpendicolare a *GD*, sarebbero esse *BL*, *BI* perpendicolari al piano *EK* [a], il che si è dimostrato impossibile [b]; dunque la comune sezione *AB* è perpendicolare al soggetto piano *EK*.

a *Def.* 4. XI.
b 13. XI.

PROPOSIZIONE XX.

FIG. 189.

Se l' angolo solido ABDC *è contenuto da tre angoli piani* BAD, BAC, DAC; *due di essi saranno maggiori del rimanente.*

Quando fossero tutti e tre uguali, è manifesto, essere due maggiori del terzo: ma se sono disuguali, sia *BAC* il massimo, da cui si levi l'angolo *BAE* $=$ *BAD*; e tirata la retta *BEC*, posta *AD* $=$ *AE*, si congiungano *BD*, *CD*: essendo ne' triangoli *BAE*, *BAD*, intorno agli angoli uguali in *A*, il lato *AB* comune, ed *AE* $=$ *AD*, sarà ancora la base *BE* $=$ *BD*: ma *BD* $+$ *DC* è maggiore di *BC*; dunque *DC* è maggiore di *EC*; onde nei triangoli *EAC*, *DAC* essendo il lato *AC* comune, ed *AE* $=$ *AD*, ma la base *EC* minore della *DC*, sarà l' angolo *EAC* minore dell' altro *DAC* [c]; e però essendo *BAE* $=$ *BAD*, sono i due *BAD*, *DAC* maggiori del massimo *BAC*. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXI.

TAV. X. FIG. 190.

Qualunque angolo solido A *composto di quanti si voglia angoli piani* BAC, CAD, DAE, EAF, FAG, GAB *avrà sempre la somma di detti angoli minore di quattro retti.*

Si

SI tagli con un piano *BCDEFG*, che sarà la base della piramide, opposta alla cima dell' angolo *A*, e preso in essa base qualunque punto *I*, si congiungano le rette *IB*, *IC*, *ID*, *IE*, *IF*, *IG*. Essendo tanti i triangoli, che da' lati della base si alzano alla cima *A* della piramide, quanti i triangoli da' medesimi lati convergenti al punto *I* preso dentro la base; dunque tutti gli angoli, che sono in quelli, uguagliano tutti gli angoli di questi, i quali comprendono tutti gli angoli del poligono di essa base insieme con i quattro retti, che sono intorno al punto *I*: ma essendo gli angoli *BCA*, ed *ACD* maggiori di *BCD* a, e così i due *CDA*, *ADE* maggiori di *CDE* ec. sono tutti gli angoli adiacenti a' lati del poligono, ne' triangoli esterni diretti ad *A*, maggiori degli angoli adiacenti ad essi lati ne' triangoli interni della base, convergenti in *I*; dunque gli angoli rimanenti de' triangoli esterni, che compongono l'angolo solido *A*, sono minori degli angoli, che hanno intorno al punto *I* i triangoli interni della base; e però essendo questi uguali a quattro retti, quelli ne sono minori. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXII.

FIG. 191.

Se sieno di tre angoli piani BAC, CAD, DAE *due qualsivoglia maggiori del terzo, e contenuti da rette tutte uguali; delle basi* BC, CD, DE, *che ne congiungono i termini; si potrà costituire un triangolo.*

I Termini *B*, *C*, *D*, *E*, di quelle rette uguali sono in un arco circolare, il cui centro *A*, e del-

e delle basi suddette saranno sempre due maggiori della rimanente, perchè se si dubitasse, essere le due $BC + CD$ maggiori dell' altra DE, congiunta la BD, per essere i due angoli BAC, CAD cioè l' angolo BAD maggiore dell' altro DAE; ed i lati uguali, la base BD è della base DE maggiore: ma le due BC, CD sono maggiori della BD; dunque sono ancora esse maggiori della DE; però delle tre linee BC, CD, DE riuscendo sempre due maggiori della terza, se ne può fare un triangolo.[a] Il che ec.

a 21. 1.

PROPOSIZIONE XXIII. PROBL.

FIG. 192.

Dati i tre angoli BAC, CAD, DAE, *come nella precedente, i quali però sieno minori di quattro retti, farne un angolo solido.*

DElle loro basi BC, CD, DE congiunte a' termini de' lati uguali di detti angoli se ne faccia un triangolo FGH[b], e gli si circoscriva un cerchio, il cui raggio FI sarà minore del lato AB perchè se gli fosse uguale, essendo nel cerchio BDE inscritte le due basi BC, CD, sarebbe all'altra DE uguale la BD, essendo il cerchio del raggio $= AP$ circoscritto al triangolo delle tre linee BC, CD, DE: ma si è provata la BD maggiore della DE; dunque FI non può essere uguale ad AB. Nè meno può essere FI maggiore di BA, o di CA; perchè prolungata CA in L, e fatta CL uguale ad FI, se col raggio CL si descrivesse l' arco circolare MCN, ed in esso si adattasse $CM = CD$, e $CN = CB$, congiunta MN dovrebbe essere uguale alla DE: ma per essere l' angolo

b 22. XI.

NCM

NCM, maggiore di *BCD*, ed i lati *CN*=*CB*, e *CM*=*CD*, la base *MN* sarà maggiore di *BD*, dunque sarebbe ancora maggiore della *DE*; pertanto *FI* debbe essere minore di *AB*, e degli altri lati *AC*, *AD*, *AE* uguali; onde il quadrato di *AB* sarà maggiore del quadrato *FI*; si ponga dunque nel centro *I* del circolo *FGH* perpendicolare al piano di esso circolo la retta *IK*, il di cui quadrato uguagli l'eccesso del quadrato *AB* sopra il quadrato *IF*; dunque congiunte le rette *FK*, *GK*, *HK*, sarà ciascuna uguale a' lati *AB*, *AC*, *AD*, essendo il quadrato *FK*= a' quadrati *FI*, ed *IK*, il quale è l'eccesso del quadrato *AB*, ovvero *AC* sopra il quadrato *FI*; onde *FK*=*AB*, e così *KH*=*AC*, e *KG*=*AD*; ed essendo le basi *HF*, *FG*, *GH* uguali alle basi *BC*, *CD*, *DE*, sarà l'angolo *FKH*=*BAC*, e l'angolo *FKG*=*CAD*, e l'altro *GKH*=*DAE*; dunque l'angolo solido *FKHG* è composto de' tre angoli piani dati *BAC*, *CAD*, *DAE*. Il che dovea farsi.

PROPOSIZIONE XXIV.

Il solido AB *composto di piani paralleli avrà i piani opposti* AG, *e* DB, AC, *ed* FB *ec. parallelogrammi simili, ed uguali.* FIG. 195.

Il piano *AC* essendo segato da' piani paralleli *AE*, *BH*, le loro comuni sezioni *AD*, *HC* sono parallele; e l'istesso piano *AC* essendo ancora segato da' piani *HF*, *CE* paralleli, saranno ancora le rette *AH*, *DC* parallele a; dunque *ADCH* è un parallelogrammo, in cui saranno

a 16. XI.

uguali

uguali i lati opposti, cioè $AD = CH$, ed $AH = DC$. Similmente si proverà essere $EDCB$ un parallelogrammo, e la EB uguale, e parallela a DC; e la DE uguale, e parallela a BC, ed $ADEF$ un parallelogrammo, in cui EF è uguale, e parallela a DA, ed ED uguale, e parallela ad FA; onde essendo AH, ed EB uguali, e parallele all' istessa DC, sono uguali, e parallele tra loro, ed altresi EF, ed AD, e CH sono uguali, e parallele; dunque l'angolo ADC sarà uguale all' angolo FEB a, e similmente gli altri angoli DCH, EBG si proveranno uguali: ed è $AD . DC :: FE . EB$ per l'ugualità de' lati omologhi; dunque sono simili, ed uguali i parallelogrammi opposti AC, FB, e l'istesso proverassi dagli altri FD, GC, e delli FH, EC. Il che era da dimostrarsi.

a 10. XI.

PROPOSIZIONE XXV.

FIG. 194.

Il solido parallelepipedo ABCDR *segandosi col piano* EGFH *parallelo agli opposti* BTCO, ASDR; *saranno le di lui porzioni* AEFD, BEFC *proporzionali alle loro basi* AEHR, BEHO.

Si concepisca prolungato dall' una, e dall' altra parte esso parallelepipedo, e presa $AI = AE$, e $BK = EB$, si concepiscano eretti i piani $ILQM$, $KOPN$ paralleli a' piani $ASDR$, $BTCO$, saranno i parallelogrammi $AIMR$, $AEHR$ uguali, e così ancora $BEHO = BKNO$, e tutti gli altri corrispondenti si uguaglieranno; perciò il solido $AEFD = IASQ$, ed il solido $BEGC = KBTP$ onde quanto si moltiplicasse la base $AEHR$ nella base EIM, tanto riuscirebbe moltiplicato il solido

do $AEFD$ nel solido $IEGQ$; e quanto fosse moltiplicata la base $BEHO$ nella base EKN, tanto sarebbe il solido $BEGC$ moltiplicato nel solido $CEKP$; e secondo che fosse la base EIM uguale, maggiore, o minore della base EKN, tanto sarebbe il solido $IEGQ$ uguale, maggiore, o minore del solido $GEKP$; dunque come la base $AEHR$ alla base $BEHO$ così debbe essere il solido $AEFD$ al solido $BEGC$, come dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I. E' manifesto, essere dette porzioni parallelepipede proporzionali alle loro lunghezze, o altezze AE, EB; le quali sono, come $AEHR$ a $BEHO$.

COROLLARIO II. Nell' istessa maniera si proverebbe ancora ne' prismi da qualunque sorta di base poligona equabilmente promossi, che segati da un piano parallelo alle basi ne riuscirebbero le porzioni proporzionali alle lunghezze, o altezze loro.

PROPOSIZIONE XXVI. PROBL.

Alla data retta linea A B *applicare sul punto* A *un angolo solido* B A L I *uguale al dato* D C F E. FIG. 195.

DA qualunque punto F del lato CF si tiri sopra il piano DCE la perpendicolare FG, e congiunta CG, e per lo punto G tirata in esso piano la retta DGE; si congiungano le rette DF, FE; indi posto l' $AH = CD$, e fatto l' angolo $HAK = DCG$, e presa l' $AK = CG$, e l' angolo $HAI = DCE$, congiunta la HK sarà $= DG$, per essere i lati HA, ed AK uguali a' lati DC, e CG;

GG e l'angolo compreso da essi lati uguale; ed ancora l'angolo *AHK* sarà $=$ *CDG*, e prolungata la *HK* in *I* alla retta *AI*, sarà la *HI* $=$ *DE*, e l'*AI* $=$ *CE*, perchè ne' triangoli *HAI*, *DCE* gli angoli *AHI*, ed *HAI* sono uguali agli angoli *CDE*, *DCE*, ed il lato *AH* $=$ *CD*; onde ancora la *KI* sarà $=$ *GE*, ed eretta la *KL* perpendicolare al piano *HAI*, e fatta $=$ *GF*, congiunta la retta *AL*, sarà fatto l'angolo solido *BALI* $=$ *DCFE*; imperocchè congiunte le rette *HL*, *LI*, essendo *HK* $=$ *DG*, e *KL* $=$ *GF*, e gli angoli retti *HKL*, *DGF* uguali, ancora la base *HL* sarà uguale a *DF*, e similmente essendo *KI* $=$ *GE* e *KL* $=$ *GF*, e gli angoli in *K*, ed in *G* retti, la base *LI* $=$ *FE*; dunque i triangoli *HAL*, *DCF* hanno tutti i lati corrispondenti uguali, e però l'angolo *HAL* $=$ *DCF*; similmente ciascun lato di *LAI* uguaglia ciascheduno lato di *FCE*, dunque ancora l'angolo *LAI* $=$ *FCE*, e l'angolo *HAI* $=$ *DCE*; dunque tutti gli angoli essendo uguali, l'angolo *HALI* uguaglia il dato angolo solido *DCFE*. Il che ec.

FIG. 196. NOTA. *Se l'angolo solido dato fosse contenuto da più di tre angoli piani, si potrebbe ad ogni modo applicare ad una data retta in un dato punto l'angolo solido uguale ad esso. Per esempio sia l'angolo dato* DCFEM *contenuto da quattro angoli piani; si seghi con un piano quadrilineo* DEFM *opposto al dato angolo* C, *indi condotta una diagonale* DF, *col piano* CDF *si dividerebbe esso angolo solido in due angoli contenuti da tre angoli piani; onde dopo aver fatto alla data retta linea, nel dato punto, un angolo uguale ad uno de' contenuti da tre angoli*

goli piani DCFE; *si potrà aggiungere l' altro angolo da tré piani contenuto* DCMF; *onde riuscirà descritto al punto della data linea l' angolo quadrilineo uguale al dato* DCEFM; *e se fosse il dato angolo compreso da più di quattro angoli piani, la base di tale angolo sarebbe un poligono divisibile in più di due triangoli: onde esso angolo potrebbe dividersi in tanti angoli trilineari, quanti sono i triangoli, in cui si spartirebbe il piano della sua base; e però aggiungendo al medesimo punto dato della data retta linea, concorrente con altre, che formano i triangoli dell' angolo solido già descritto, altri angoli solidi trilineari, che sono nel dato angolo solido, riuscirà di costituire adiacente alla data linea dal punto dato un angolo solido contenuto da più angoli piani, benchè fossero più di tre, e più di quattro gli angoli componenti il dato angolo solido.*

PROPOSIZIONE XXVII. PROBL.

Sopra una data retta linea AB *descrivere un solido parallelepipedo simile, e similmente posto ad un altro dato* DCEM. FIG. 197.

COstituiscasi al punto dato *A* sopra la data linea *AB* un angolo solido *BALI* = al dato *DCFE* a, è taglisi *AL* in proporzione a *CF*, come la data *AB* al lato *CD*, e si faccia ancora l' *AI* alla *CE* nella medesima proporzione delle date *AB*, *CD*; indi compiuti i parallelogrammi *BALN*, *IALG*, *NLGO*, si compisca il parallelepipedo co' piani paralleli a questi, che saranno parallelogrammi simili, ed uguali b, che sarà fatto sulla da-

a 26. XI.

b D. f. 6.

ta

ta linea *AB* il solido *BALIO* simile, e similmente posto al dato *DCEFM*, avendo gli angoli uguali ad esso, ed i lati proporzionali a' lati del medesimo. Il che era da farsi.

PROPOSIZIONE XXVIII.

FIG. 193. *Segandosi un parallelepipedo* AB *col piano* CFED, *che passa per i diametri de' piani opposti; sarà segato pel mezzo.*

IMperocchè essendo i piani opposti uguali, e simili parallelogrammi *GFEA*, *CDHB*; ed ancora *GADC*, ed *FEHB*; ed il piano *CFED* comune a' due prismi *CGFEAD*, e *CBFEHD* eretti sopra i triangoli simili, ed uguali *DAE*, ed *EHD*, a' quali pure corrispondono altri due *CGF*, *FBC* simili, ed uguali tra di loro, e cogli opposti; per tanto essi prismi sono uguali; onde il parallelepipedo dal piano *CFED* resta diviso pel mezzo (a).

PRO-

(a) Le porzioni parallelepipede sono proporzionali alle loro basi parallelogramme: (Pr. 25. XI.

Ma i parallelogrammi, che servono loro di base, hanno queste cinque proprietà, cioè

I. Allora son divisi pel mezzo, quando si conduce in essi una linea, che congiunga gli angoli opposti, (Pr. 34. I.

II. Sono uguali, qualora sieno posti sulla medesima base, e fra le medesime parallele descritti; (Pr. 35. I.

III. Come ancora sono uguali, quando abbiano uguali basi, e la medesima altezza: (Pr. 36. I.

IV. E sono alle loro basi proporzionali, allorchè hanno la medesima altezza: (Pr. I. V.

V. E in ultimo i parallelogrammi uguali hanno intorno ad angoli uguali i lati reciprocamente proporzionali; e viceversa: (Pr. 14. VI.

Dunque data la debita proporzione l'istesso pure si avvererà anche de' parallelepipedi, cioè.

I Se-

PROPOSIZIONE XXIX.

I solidi parallelepipedi AGHCDEFB, AGHEMLKI *posti sopra l'istessa base* AGHE, *tragl' istessi piani paralleli* AH, FK, *con i lati* AM, GL, *ed* EI, HK *prodotti all' istesse linee de' lati* FB, DC *prolungate nell' istesso piano, sono sempre parallelepipedi tra di loro uguali.* FIG 199.

IMperocchè essendo *DC*=*EH*=*IK*, aggiunta *CI*, è *DI*=*CK*; ma ancora *DE*=*CH*, ed *EI*=*HK*; dunque il triangolo *DEI* è uguale, e simile al triangolo *CHK*, e così ancora i triangoli *FAM*, *BGL* sono simili, ed uguali; ed ancora il parallelogrammo *DIMF* è uguale, e simile a *CKLB*, e così *DEAF* a *CHGB*, ed *EIMA* ad *HKLG*; e perciò il prisma triangolare *DIEMFA* uguaglia il prisma *CKHLBG*; e tolto di comune *CPIMNB*, ed aggiunto a' rimanenti pezzi il prisma *EPHGNA*, riesce il parallelepipedo *AGHCDEFB* uguale all'altro *AGHEMLKI*. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXX.

Quando ancora il parallelogrammo IMLK *opposto* FIG 200.

I. Segati questi con un piano, che passa per i diametri de' piani opposti, saranno essi parallelepipedi divisi pel mezzo; (Prop. 28. XI.

II. Saranno uguali, quando sieno posti sulla medesima base, e fra gli stessi piani paralleli: (Prop. 29. XI.

III. Come ancora dovranno essere uguali, qualora abbiano basi uguali, e la medesima altezza: (Pr. 31. XI.

IV. E saranno proporzionali alle loro basi, quando abbiano essi la medesima altezza (Pr. 32. XI.

V. E finalmente i parallelepipedi uguali hanno le basi reciproche dell'altezze; e viceversa. (Prop. 34. XI.

sto alla base comune EAGH *di due parallelepipedi tra i medesimi piani paralleli, non s' incontrasse colla direzione delle rette parallele* DC, FB; *ad ogni modo essi parallelepipedi saranno uguali.*

Esse rette prolungate *DC*, *FB* parallele ad *AG*, e ad *IK* seghino le altre rette tra di loro parallele *IM*, *KL* ne' punti *N*, *O*, *Q*, *P*, sarà il parallelogrammo *NOPQ* = *DCFB* = *AEHG*; onde condotte le rette *EN*, *HO*, *AQ*, *GP*, sarà il parallelepipedo *AEHGPQNO* = *AEHGBCDF* : e similmente *AGHEMLKI* = *AEHGPQNO*, terminando all' istesse linee prodotte *IM*, *KL*; dunque sono ancora uguali *AEHGBCDF*, ed *AGHEMLKI*, posti sull' istessa base, e tra gli stessi piani paralleli, benchè non s' incontrino colla direzione delle rette *DC*, *FB*. Il che ec.

a 29. xi.

Corollario. E' manifesto, che se ancora sopra l' istessa base *IMLK* fosse tra gli stessi piani paralleli descritto un altro parallelepipedo, sarebbe uguale ad esso *AGHEMLKI*, e conseguentemente ancora uguale a ciascuno degli altri due *AEHGBCDF*, ed *AEHGPQNO*; onde ancora i parallelepipedi, che hanno basi uguali, e sono tra i medesimi piani paralleli, sono tra di loro uguali.

PROPOSIZIONE XXXI.

I solidi parallelepipedi, che hanno uguali basi, e la medesima altezza, fra loro sono uguali.

Essendo che gli stessi piani paralleli hanno la medesima altezza in qualunque sito, ed un

piano

piano parallelo all' istessa base, se fosse sopra, ò sotto il parallelogrammo del parallelepipedo opposto alla base, avrebbe maggiore, o minore altezza; dunque i solidi parallelepipedi, che hanno la medesima altezza, possono disporsi tra gli stessi due piani paralleli, e però avendo le basi uguali, dovranno essere uguali tra loro [a].

[a] Cor. 30. XI.

PROPOSIZIONE XXXII.

FIG. 201.

I solidi parallelepipedi AE, GO, *che hanno la medesima altezza, sono tra di loro, come le basi* AC, GM.

Prolungata *LG* in *F*, si faccia il parallelogrammo *HGFI* = *ABCD*, e si compisca il parallelepipedo *FGNQRIH* tra gli stessi piani paralleli dell' altro: sarà questo parallelepipedo = *ABCDTEVS*, avendo uguali basi, e la medesima altezza [b]: ma *FGNQRIH* all' altro *GNPLOQHM* è, come la base alla base [c], cioè come *IFGH* (che = *ABCD*) a *GLMH*; dunque ancora il parallelepipedo *AE* all' altro *GO* è, come la base *AC* alla base *GM*. Il che ec.

[b] 31. XI.
[c] 25. XI.

Ancora i prismi ugualmente alti sono come le loro basi; perchè se sono basi triangolari, sono la metà de' parallelepipedi eretti sopra i parallelogrammi doppi di tali triangoli: se sono basi poligone, possono dividersi in triangoli, ed essi prismi interi in altrettanti prismi triangolari proporzionali alle loro basi.

PROPOSIZIONE XXXIII.

FIG. 202.

I solidi parallelepipedi simili HIMKZ, ABDGF *sono in proporzione tripla de' lati omologhi* IM, EG.

Si

SI prolunghino la retta *LM* in *MO*=*EF*, la retta *IM* in *MN*=*EG*, e la retta *RM* in *MP*=*EA*, e compiuti i parallelogrammi *OMN*, *OMP*, *NMP*, si tirino gli opposti piani paralleli, da cui si formerà il parallelepipedo *OPQNM* uguale, e simile al dato *ABDGF*, avendo gli stessi angoli solidi, e i medesimi parallelogrammi uguali, e simili. Prolungati ancora i parallelogrammi, si compiscano i solidi parallelepipedi *KLSYM*, *LTVSQM*; sarà il parallelepipedo *HIMKZ* al conseguente *KLSYM*, come la base *IR* alla base *RN*, cioè come il lato *IM* ad *MN*; ed è *KLSYM* ad *LTVSQM*, come le basi *RN*, *NP*, cioè come *RM* ad *MP*: e finalmente *LTVSQM* ad *OPQNM*, come le basi *LN*, *NO*, cioè come *LM* ad *MO*; dunque la proporzione di *HIMKZ* ad *OPQNM*, ovvero all' uguale solido *ABDGF* è composta delle tre ragioni uguali, cioè di *IM* ad *MN*, di *RM* ad *MP*, e di *LM* ad *MO*, (perchè essendo simili i parallelepipedi, i loro lati omologhi debbono avere l'istessa proporzione;) dunque la ragione di essi parallelepipedi simili è tripla di quella di un lato *IM* al lato omologo *EG*=*MN*. Il che doveasi dimostrare.

COROLLARIO. Se quattro linee sono proporzionali, un solido fatto sopra alla prima al solido simile fatto sopra alla seconda stà, come la prima alla quarta, che ha ragione tripla della prima alla seconda.

PROPOSIZIONE XXXIV.

FIG. 203. *I parallelepipedi uguali* ACD, NPI *hanno le basi reciproche dell' altezze; e quei parallelepipedi,* *in*

in cui le basi sono in ragione reciproca dell' altezze, sono tra di loro uguali.

SE avessero uguale altezza i solidi, dovrebbero ancora avere le basi uguali, per essere tra di loro uguali; onde la base del primo alla base del secondo sarebbe, come l' altezza di questo all' altezza di quello. Se poi le altezze sono disuguali, essendo quella di *NPI* maggiore di quella di *ACD*, si tagli *NPI* col piano *OLKM* parallelo alla base *HGIQ*, in altezza uguale a quella del solido *ACD*, (tirata *NX* perpendicolare al piano della base *HGIQ*, e segante il piano *OLKM* in *V* in maniera, che *VX* sia uguale all'altezza del solido *ACD*) sarà *ACD . OLIQ :: BZDS . HGIQ* [a]: ma *ACD*=*NPI*; dunque ancora *NPI . OLIQ :: BZDS . HGIQ*: ma *NPI . OLIQ :: NH . HO* [b] *:: NX . VX*; dunque *BZDS . HGIQ :: NX . VX*; e però la base dell' uno alla base dell' altro è, come l' altezza di questo all' altezza di quello: e viceversa essendo *BZDS . HGIQ :: NX . VX*, che uguagli l' altezza di *ACD*, sarà *ACD . OLIQ :: NPI . OLIQ*: e però *ACD*=*NPI* (*a*). Il che dovea dimostrarsi.

a 32. XI.

b 25. XI.

P Co-

Prima Parte.

(*a*) I.	ACD	. OLIQ ::	BZDS	. HGIQ :	(32. XI.
ma		ACD =	NPI ;		(*Ipotesi*
dunque	NPI	. OLIQ ::	BZDS	. HGIQ :	
ma	NPI	. OLIQ ::	NH	. HO ;	(25. XI.
dunque	BZDS	. HGIQ ::	NH	. HO :	(11. V.
ma	NH	. HO ::	NX	. VX ,	(2. VI. 18. V.
sicchè	BZDS	. HGIQ ::	NX	. VX .	(11. V.

COROLLARIO. Ancora i prismi triangolari uguali, essendo la metà di uguali parallelepipedi, (*per la Proposizione* 28.) debbono avere le basi reciproche dell'altezze; e se hanno le basi reciproche dell'altezze, debbono essere uguali, essendo l'istessa proporzione delle basi di questi prismi, che quella de' parallelepipedi, e l'istessa altezza di questi, e di quelli.

PROPOSIZIONE XXXV.

FIG. 204. *Essendo uguali i due angoli solidi* HALI, DCFE, *contenuti da angoli piani* HAI = DCE, HAL = DCF, LAI = FCE, *se dalle due linee* AL, CF *sublimi al piano degli angoli uguali* HAI, DCE, *si tramandano in essi piani le perpendicolari* LK, FG, *congiunte le rette* AK, CG, *riuscirà l'angolo* GCF = KAL.

SIeno prese le due sublimi *AL*, *CF* tra di loro uguali, e tirate le *LK*, *FG* perpendicolari a' piani soggetti, si tirino la *KI*, e la *GE* perpendicolari alle *AI*, *CE*, e prodotte *IK* in *H*, ed *EG* in *D* agli altri lati *AH*, *CD*, si congiungano *HL*, *IL*, ed *EF*, *DF*. Essendo il quadrato *AL* = a' quadrati *AK*, *KL*, ed il quadrato *AK* = a' qua-

---

Seconda Parte.

II.	BZDS . HGIQ :: NX . VX;	(*Dim.* 1 *part.*
ma	BZDS . HGIQ = ACD . OLIQ;	(32. XI.
dunque	ACD . OLIQ :: NX . VX;	(11. V.
ma	NPI . OLIQ :: NX . VX;	(25. XI.
dunque	ACD . OLIQ :: NPI . OLIQ;	(11. V.
sicchè	ACD = NPI.	(9. V.

a' quadrati AI, IK; dunque il quadrato AL=a tre quadrati AI, IK, KL; ma i due quadrati IK, KL=al quadrato IL; dunque il quadrato AL =a' quadrati AI, ed IL; però l'angolo AIL è retto. Similmente si proverà retto l'angolo CEF; dunque essendo l'angolo $LAI=FCE$, e l'angolo $AIL=CEF$, ed il lato $AL=CF$, sarà ancora $AI=CE$, ed $IL=EF$ a; però essendo ancora l'angolo $HAI=DCE$, ed $AIH=CED$, ed il lato $AI=CE$; sarà pure $AH=CD$, ed $HI=DE$ a: ed essendo i lati $AH=CD$, ed AL $=CF$, e l'angolo $HAL=DCF$, sarà pure la base $HL=DF$: indi ne' triangoli HLI, DFE essendo tutti i lati del primo=a quelli del secondo, ancora gli angoli corrispondenti saranno uguali; perciò ne' triangoli KIL, GEF essendo l'angolo $KIL=GEF$, ed i retti IKL, EGF uguali, ed $IL=EF$, sarà pure $IK=EG$, e $KL=GF$; onde essendo $AI=CE$, ed $IK=EG$, e l'angolo $AIK=CEG$, sarà pure $AK=CG$; però ne' triangoli AKL, CGF essendo $AL=CF$, ed $AK=CG$, e $KL=GF$, l'angolo GCF sarà $=KAL$. Il che dovea dimostrarsi.

a 26. 1.

Corollario. Essendosi mostrata $KL=GF$. dunque in due angoli solidi compresi da tre angoli piani, ciascuno uguale al suo corrispondente, presi due lati uguali AL, CF, e da' loro termini tirate sopra i piani opposti HAI, DCE le perpendicolari LK, FG, riescono queste tra di loro uguali altezze.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Essendo tre linee A, B, C *proporzionali, il so-* FIG. 205.

lido parallelepipedo EDKF *fatto dalle date tre linee è uguale al solido* LMQN *equiangolo, fatto dalla sola media* B, *cui sieno uguali tutti i suoi lati.*

Essendo $DF = A$, $DE = B$, $DK = C$ nel parallelepipedo $EDKF$, e ciascun lato MN, ML, $MQ = B$ nell' altro solido equiangolo $LMQN$, sarà $DF . MN :: MQ . DK$; onde intorno agli angoli uguali FDK, NMQ essendo i lati reciprochi, è il parallelogrammo $FDKI = NMQR$ [a]; ed essendo $DE = ML$, chi tirasse da' punti $E\ L$, sopra i piani KDF, QMN le perpendicolari, sarebbero nell' uno, e nell' altro solido uguali altezze [b]; dunque essendo ancora le basi $FDKI$, $NMQR$ uguali, essi solidi parallelepipedi sono uguali. Il che ec.

a 14. VI.

b Coroll. 35. XI.

PROPOSIZIONE XXXVII.

FIG. 206.

Se quattro rette linee AB, CD, EF, GH *sono proporzionali; due parallelepipedi simili* ABK, CDL *fatti sopra alle prime saranno proporzionali a due altri simili tra di loro* EFM, GHN *fatti sopra all' ultime.*

Imperocchè ABK a CDL è in ragione tripla di AB a CD [c]; e similmente EFM a GHN è in ragione tripla di EF a GH [c]; dunque essendo $AB . CD :: EF . GH$, ancora la tripla ragione della prima è uguale alla tripla della seconda, e però $ABK . CDL :: EFM . GHN$. Il che era da dimostrarsi.

c 33. XI.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Sia il piano C A D *perpendicolare ad un altro* A D B; *se da qualunque punto* E *del primo si tira la perpendicolare sopra il secondo, caderà nella loro comune sezione* A D. TAV. XI. FIG. 207.

PErchè se cadesse fuori in *F*, tirata nel piano *CAD* sopra la retta *AD* la perpendicolare *EG*, questa pure sarebbe al piano *ADB* perpendicolare; e congiunta la *FG*, avrebbe il triangolo *EFG* in *F*, ed in *G* due angoli retti; Il che è impossibile; dunque ec.

PROPOSIZIONE XXXIX.

Nel solido parallelepipedo A B C D E *tirato un piano* M N Q P *segante pel mezzo i lati* A B, D C, G T, E F *de' parallelogrammi opposti, ed un altro piano* K L I H *segante pel mezzo i lati* A D, B C, G E, T F *degli opposti parallelogrammi; la comune sezione* O R *di tali piani, ed il diametro del solido* A F *congiungente gli angoli opposti si segheranno pel mezzo nel punto* S. FIG. 208.

SI congiungano le rette *AO*, *CO*, *GR*, *FR*; essendo *AM*=*CN*, (perchè sono la metà delle opposte parallele, ed uguali *AB*, *DC*,) ed *MO*=*NO*, (essendo *MN* divisa pel mezzo in *O*, siccome l' opposte, e parallele ad essa *AD*, *BC* sono divise pel mezzo dalla *KL*) e l' angolo *AMO*=*ONC*, per essere alterni delle parallele; sarà pure *AO*=*CO*, e l' angolo *MOA*=*NOC*, ciascuno de' quali coll' angolo *AON* facendo due

retti,

retti, saranno esse *AO*, *OC* per diritto fra loro: e similmente si proverà essere *GRF* una linea direttamente continuata; onde essendo *AG* uguale, e parallela a *CF*, (per essere ciascuna di loro parallela, ed uguale a *DE*) le rette *AC*, *GF* sono pure uguali, e parallele; onde *ACFG* è un parallelogrammo, nel di cui piano si segano *OR*, ed *AF* in *S*; e ne' triangoli *AOS*, *FRS* l'angolo alterno *SAO* = *SFR*, ed *AOS* = *FRS*, col lato *AO* = *FR*, dimostrano essere pure *OS* = *SR*, ed *AS* = *SF*; dunque la comune sezione *OR* di detti piani, ed il diametro, che congiunge gli angoli opposti *AF* del medesimo parallelepipedo si tagliano pel mezzo in *S*. Il che ec.

PROPOSIZIONE XL.

FIG. 209.

Due prismi d' uguale altezza ABCFED, MGHILK, *avendo il primo per base il parallelogrammo* ABCF *doppio della base triangolare* MGH *dell' altro, sono tra di loro uguali.*

IMperocchè compiuti essi prismi in parallelepipedi, con fare i parallelogrammi *ABDN*, *FCEO*, ed *MGHP*, *KLIQ*, riuscirà la base *MGHP* = *ABCF*, essendo l'una, e l'altra doppia del triangolo *MGH*; dunque tali parallelepipedi *ABCEOND*, ed *MGHIQKL* sono uguali, avendo uguale altezza, ed uguali basi; ma i suddetti prismi sono la metà di tali parallelepipedi [a]; dunque ancora essi prismi erano tra loro uguali. Il che dovea dimostrarsi.

a 28. XI.

PRE-

PREFAZIONE

AL LIBRO XII.

DEGLI ELEMENTI

DI EUCLIDE.

EUclide dopo avere esposti nel Libro antecedente gli elementi de' Solidi, e determinate le misure de'corpi più facili a concepirsi, come quelli, che hanno per loro termini le superficie piane; in questo Libro XII. passa a considerare i corpi terminati da superficie curve, vale a dire i Cilindri, i Coni, e le Sfere; gli paragona tra loro, e definisce le loro misure. Non è meno vantaggioso degli altri esso Libro; mentre contiene in sè quei principi, onde furono stabilite, e formate tante famosissime dimostrazioni intorno al Cilindro, al Cono, ed alla Sfera; nelle quali divisate ci vengono quelle stupende proprietà le quali furono con incredibil gloria, e con acutissime speculazioni già ritrovate dai più rinomati, ed illustri Geometri, e specialmente dall'incomparabile divino ingegno d'Archimede ne' due Libri della Sfera, e del Cilindro, i quali per le ammirabili proprietà, che contengono, furono dall'Autore giudicati i più nobili fra i tanti maravigliosi suoi Libri, e degni perciò d'essere espressi col Cilindro, e colla Sfera; quale inscritta, ed inserita dentro un Cilindro volle collocata sopra del suo sepolcro.

Quanto nobili, e sublimi sieno le Proposizioni, che siccome nel precedente Libro, così in questo ancora contengonsi, lo potrà ciascuno per se medesimo ben facilmente riconoscere; anzichè son d'avviso, che nel riflettere alla serie non interrotta, ed alla catena di verità, per le quali di grado in grado si riconosce guidato alle più belle cognizioni, che rinvenir si potessero dall'intelletto umano, sia per essere più vivamente acceso, ed infiammato dal desiderio, e dall'amore di questa Scienza, considerando quanto ubertosa, ed inesausta copia di verità si dirama da quei piccoli fonti, e quasi primi semi di cognizioni, che nei passati Libri si stabilirono.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE
LIBRO XII.

PROPOSIZIONE I.

FIG. 210. *I Poligoni simili* ABCDE, FGHIK *inscritti ne' cerchj, sono come i quadrati de' loro diametri* AL, FM.

COndotte le rette *EB*, *EL*, e *KG*, *KM*, essendo l'angolo *BAE*=*GFK*, ed i lati intorno ad essi proporzionali, cioè *BA*.*AE*::*GF*.*FK* per la similitudine de' poligoni, sono simili i triangoli *ABE*, *FGK*; onde l'angolo *ABE*=*FGK*: ma a quello è uguale l'angolo *ALE*, ed a questo si uguaglia l'angolo *FMK* [a]; dunque i triangoli *ALE*, *FMK* hanno uguali gli angoli in *L*, ed in *M*, e sono gli angoli *AEL*, *FKM* retti [b], però ancora essi triangoli sono simili; onde *AE*.*AL*::*FK*.*FM*, e permutando *AE*.*FK*::*AL*.*FM*; sicchè il poligono fatto sopra il lato *AE* al simile fatto sopra il lato

a 21. III.
b 31. III.

lato *FK* stà, come il quadrato *AL* al simile quadrato di *FM* a (*a*). Il che era da dimostrarsi. a 22. VI.

AV-

(*a*) I. Tutto il perimetro d' un poligono a tutto il perimetro dell' altro simile è proporzionalmente, come il lato dell' uno al lato corrispondente dell' altro; poichè essendo qualsivoglia lato del primo poligono proporzionale al lato corrispondente del secondo, saranno pure tutti i lati del primo, che formano il di lui perimetro, a tutti i lati del secondo, che compongono il perimetro di questo, nell' istessa ragione, in cui un lato del primo è al lato corrispondente del secondo.

II. Quindi parimente raccogliesi, che il perimetro del primo poligono stà al perimetro del secondo, che simile si suppone al primo poligono, come il diametro, o 'l raggio del cerchio, ove è inscritto il primo, al diametro, o al raggio del cerchio, ove è inscritto il secondo. Imperciocchè ec.

AE . FK :: AL . FM (*Per la dimostrazione già fatta*.
ma AE . FK :: AB . GF; (*Perchè le figure simili intorno gli angoli uguali hanno i lati proporzionali*.
dunque AB . GF :: AL . FM: (*Prop.* II. V.
ma anche BC . GH :: AL . FM,
e . CD . HI :: AL . FM, (*Per le mede-*
e in fine DE . KI :: AL . FM; (*sime prove*
quindi ne segue, che le rette AE+AB+BC+CD+DE stanno all'altre rette FK+GF+GH+HI+KI, come AL a FM, cioè tutto il primo poligono AEDCB all' altro FKIHG stà come il diametro A L del primo al diametro F M del secondo poligono. Il tutto per la *Prop.* XII. V.

III. Che però potendosi accrescere il numero, e diminuire la grandezza de' lati de' poligoni all' infinito; dovrà finalmente tal proprietà de' poligoni simili inscritti ne' cerchj verificarsi ancora delle circonferenze de' medesimi cerchj,

AVVERTIMENTO.

FIG. 211. *Nella seguente proposizione è supposta la prima del Libro* x., *di cui non si è addotta quì la dimostrazione, però basta osservare*, che date due quantità disuguali* AB, *e* C, (*o sieno linee, o superficie, o solidi*); *se dalla maggiore si levi* AD, *che ne sia la metà, e dalla rimanente* DB *si levi la* DE *che sia la metà di essa; e così di mano in mano si continui di fare; riuscirà finalmente il resto minore della data quantità* C; *imperocchè questa raddoppiata in* GI, *e la* GI *raddoppiata in* GH *e questa in* GF *ec. dovrà finalmente farsi maggiore di essa* AB; *onde la metà di* AB *sarà minore di* FH, *metà di* FG; *e la metà di* DB *sarà pure minore di* HI, *metà di* HG; *e la metà di* EB, *che sia* EL, *è minore di* IK, *metà di* IG; *e però il resto* LB *sarà minore di* KG, *la quale è uguale alla data* C.

Che se dalla data AB *si toglie* AD *maggiore della metà di essa, e dalla rimanente* DB *la* DE *maggiore della metà della rimanente* DB, *e dalla* EB *si tolga la* EL *maggiore della metà di quella ec. maggiormente si vede, che alla fine il resto* LB *sarà minore della data* C. *Il che è quanto si mostra nella Proposizione I. del Libro X. supposta nella seguente.*

PROPOSIZIONE II.

FIG. 212. *I cerchj* ABT, EFN *sono proporzionali a' quadrati de' loro diametri* AC, EG.

Im-

chi, che sono l'ultimo termine, nel quale vanno a finire i perimetri de' poligoni simili, moltiplicato che sia in infinito il numero de' lati; e in questa maniera le circonferenze de' cerchj si dimostrano proporzionali ai raggi loro, e a' diametri.

IMperocchè si faccia come il quadrato *AC* al quadrato *EG*, così il cerehio *AST* allo spazio *Z*. Se questo spazio non fosse uguale all'altro cerchio *ENM*, o sarebbe minore, o maggiore di esso. Sia minore, sicchè gli manchi la quantità *X* per uguagliarlo. Inscrivasi nel cerchio *ENM* il quadrato *EFGH*, il quale essendo la metà del quadrato del diametro *EG* (a), che si circoscriverebbe al cerchio (b), perciò *EFGH* è maggiore della metà di esso cerchio (c); indi ne' segmenti residui divisi per mezzo gli archi in *O*, *M*, *L*, *N*, e congiunte le rette *EO*, *OH*, *GM*, *MF*, *EL*, *FL*, *GN*, *HN*, saranno questi triangoli *EOH*, *GMF*, *ELF*, *GNH* maggiori della metà de' segmenti circolari, a cui sono inscritti (d), essendo qualunque trian-

(a) Il quadrato EFGH è la metà del quadrato del diametro EG; poichè il quadrato d' EG è uguale a' due quadrati d'EF, e di FG (Pr. 47 I.): ma questi sono uguali tra loro, per essere descritti sopra i lati d' un quadrato; dunque quel quadrato d'EG sarà doppio di uno di essi, cioè di EF, qual' è appunto il quadrato EFGH; onde conchiudesi essere questo la metà del quadrato del diametro EG.

(b) Che il quadrato del diametro EG resti circoscritto al cerchio ENM, è manifesto per la Proposizione VII. del Libro IV.

(c) Il quadrato EFGH è maggiore della metà di esso cerchio, poichè siccome il quadrato del diametro EG, che resterebbe circoscritto al cerchio (Pr. 7. IV.), e che è doppio del quadrato EFGH, secondo quello si è dimostrato poco sopra, sarebbe maggiore del cerchio intiero ENM, perchè ad esso circoscritto; così il quadrato EFGH, che è inscritto nel cerchio medesimo, e che è la metà del quadrato d'EG, dovrà essere maggiore del semicerchio, o della metà di esso cerchio.

(d) I triangoli EOH, HNG, GMF, FLE sono maggiori della metà de' segmenti circolari, a' quali sono essi triangoli inscritti; perchè il triangolo HNG è la metà del rettangolo HPQG (Pr. 41. I.): ma questo rettangolo è maggiore del segmento intiero circolare GNH; dunque la metà

triangolo la metà del rettangolo circoscritto al suo segmento, come HNG, è la metà di $HPQG$, e così proseguendo a dividere pel mezzo gli archi rimanenti, con tirarne le sue corde, saranno sempre questi altri triangoli più della metà de' segmenti circolari residui, i quali però finalmente riusciranno minori della quantità X [a], con cui il cerchio eccede lo spazio Z; onde l' inscritto poligono, quale sia $EOHNGMFL$, o un altro di doppio numero di lati sarà maggiore dello spazio Z (a). Perlochè inscritto nell' altro cerchio AST un simile poligono $AKBSCTDV$, sarebbe questo a quello, come il quadrato AC al quadrato EG [b], cioè come il cerchio AST allo spazio Z; dunque essendo quel poligono $EOHNGMFL$ maggiore di Z, sarebbe ancora l' altro poligono AK-

a Avvert. preced.

b 1. XII.

metà del rettangolo, che è il triangolo HNG, sarà maggiore della metà del segmento circolare GNH; ed il medesimo dee dirsi degli altri triangoli.

(a) L' inscritto poligono EOHNGMFL sarà maggiore dello spazio Z.

Imperciocchè Z+X= al cerchio ENM: (Ipot.

ma il quadrato EFGH+i segmenti= al cerchio ENM;

dunque EFGH+i segmenti circolari =Z+X:

ma i segmenti circolari addivengono finalmente <X (Avvertim. prec.)

Sicchè EFGH sarebbe > Z. E perciò il poligono EOHNGMFL molto più dovrebbe eccedere l'istesso spazio Z.

AKBSCTDV maggiore del cerchio *AST*, in cui è inſcritto [a]. Dunque non poteva eſſere *Z* minore del cerchio *ENM* [b], Nè meno poteva ſupporſi maggiore di eſſo [c], perchè facendoſi il cerchio *ENM*

(a) *Notiſi, che il quadrato d' una linea ſi denota con una lineetta, col 2. ſopravi a deſtra della ſeconda lettera.*

$AKBSCTDV . EOHNGMFL :: A\overline{C}^2 . E\overline{G}^2$; (1. XII.

ma il cerchio AST. ſpazio Z $A\overline{C}^2 . E\overline{G}^2$; (*Ipot.*
dunq; $AKBSCTDV . EOHNGMFL :: AST . Z$, (11. V.
ed $EOHNGMFL . AKBSCTDV :: Z . AST$; (*Co. P.* 4. V.
ma $EOHNGMFL > Z$; (*Dimoſtr.*
dunque $AKBSCTDV > AST$ (14. V.

(b) Dall'aſſurdo, che, ſi è rilevato, (cioè che il poligono AKBSCTDV inſcritto nel cerchio AST ſarebbe maggiore del cerchio iſteſſo, e per conſeguenza la parte maggiore del ſuo tutto), manifeſtamente apparisce non eſſere poſſibile l' ipoteſi fatta fin da principio della dimoſtrazione, vale a dire che lo ſpazio Z poteſſe eſſere minore del cerchio ENM.

(c) Le medeſime prove, che ſi ſono addotte per dimoſtrare lo ſpazio Z non potere eſſere minore del cerchio ENM, poſſono facilmente adattarſi per provare, che neppure lo ſpazio R può eſſere minore del cerchio AST, previa però l' ipoteſi,

che $E\overline{G}^2 . A\overline{C}^2 :: ENM . R$.

Poichè $ENM . R :: E\overline{G}^2 . A\overline{C}^2$: (*Ipot. ſeconda*
ma $Z . AST :: E\overline{G}^2 . A\overline{C}^2$; (*Ipot. prima*, e *Cor. P.* 4. V.
dunque $ENM . R :: Z . AST$
ma $ENM < Z$; (*Ipot.*
dunque $R < AST$ (14. V.

Lo

ENM ad uno ſpazio *R*, come il quadrato *EG* al quadrato *AC*, cioè come *Z* al cerchio *AST*; eſſendo il cerchio *ENM* minore di *Z*, ancora lo ſpazio *R* ſarebbe minore del cerchio *AST*; il che abbiamo veduto eſſere impoſſibile. Era dunque *Z* uguale al cerchio *ENM*; e però il cerchio *AST* al cerchio *ENM* è, come il quadrato del diametro *AG* al quadrato del diametro *EG*. Il che ec.

COROLLARIO I. Quindi ſi ha, che un cerchio ad un altro ſtà, come qualunque poligono inſcritto nel primo al ſimile poligono inſcritto nel ſecondo cerchio, eſſendo tutti proporzionali a' quadrati de' diametri di eſſi cerchj.

COROLLARIO II. Dal modo, con cui ſi è dimoſtrata queſta propoſizione, può dedurſi generalmente, che ſe in due date grandezze ſuperficiali, o ſolide poſſono tali quantità inſcriverſi maggiori della metà di eſſe, e nel rimanente altre quantità, che pure ſieno maggiori della metà di tali reſidui, cui ſono inſcritte; e così nel reſto di tali grandezze s'interpongano altre quantità maggiori della metà di tali ſpazj, e così ſempre, onde l'eccеſſo di qualunque data grandezza ſopra la ſomma di queſte inſcritte quantità, divenga minore di qualunque data minima grandezza; e la ſomma delle

Lo che abbiamo veduto di ſopra eſſere impoſſibile, onde è falſa altresì per queſt' altro aſſurdo, che ne ſeguirebbe, la ſeconda ipoteſi, cioè che lo ſpazio Z poteſſe eſſere maggiore del cerchio ENM. Quindi conchiudeſi, che lo ſpazio Z non potendo eſſere nè minore, nè maggiore del cerchio ENM, gli dovrà eſſere uguale; e perciò eſſendo in vigore della primaria ipoteſi il quadrato AC al quadrato EG, così il cerchio AST allo ſpazio Z sarà ancora come il quadrato AC al quadrato EG, così il cerchio AST al cerchio ENM.

delle quantità inscritte in una di tali proposte grandezze, stia alla somma di altrettante inscritte similmente nell'altra, sempre in una data ragione; ancora quelle intiere grandezze dovranno essere nella medesima ragione, come quì si è provato ne'circoli, che essendo in essi inscritti simili poligoni, i quali ne lasciano l'eccesso minore della quantità *X*, e sono sempre come i quadrati de'diametri, debbono essere i detti circoli nell'istessa ragione.

PROPOSIZIONE III.

Ogni Piramide ABCD *triangolare può dividersi in due piramidi* AEGH, EBFI *uguali simili tra se, e con l' intiera; ed in due prismi* EICHKF, EHGDKF *tra di se uguali, la cui somma però sarà maggiore della metà della data Piramide* ABCD. FIG. 213.

TAgliati per mezzo tutti i lati ne' punti *E, H, G, K, F, I*, e congiunte le rette *EH, HG, GE, EI, IF, FK, KH, HI, IK, EF*, le quali segando sempre due lati proporzionalmente sono parallele agli opposti lati; è manifesto essere uguali i triangoli *AEH, EBI*, e simili tra di se, ed all'intiero *ABC*: parimente i triangoli *AEG, EBF* sono uguali, e simili ad *ABD*; e così accade ne' triangoli uguali *AHG, EIF*, simili ad *ACD*, e negli altri due *HEG, IBF* tra loro uguali, e simili a *CBD*; dunque le piramidi *AEGH, EBFI* sono uguali, e simili tra di se, e coll' intiera *ABCD*. I prismi poscia che restano *EICHKF: EHGDKF* sono ugualmente

te alti, e quello ha per baſe il parallelogrammo *ICKF*, doppio del triangolo *IFK*, e però doppio della baſe triangolare *FKD* di queſt'altro priſma, eſſendo *IFK*=*FKD* nel parallelogrammo *IFDK*, però ſono priſmi uguali a: ma il primo è maggiore della Piramide *IKCH*, la quale è uguale a qualunque dell' altre due, per eſempio ad *AEGH*; dunque ambidue queſti priſmi ſono maggiori dell'altre due piramidi, e però ſono più della metà dell' intiera piramide *ABCD*. Il che ec.

a 40. XI.

PROPOSIZIONE IV.

FIG. 213. 214.

Le due piramidi triangolari ugualmente alte ABCD, LMON *ſe ſi dividano, come nella precedente, in due ſimili uguali piramidi, e ne' due priſmi uguali, e ciaſcuna delle particolari piramidi ſimilmente dividaſi, come le intiere, e queſte, che ne riſultano, pure dividanſi, come l' altre, e così di mano in mano; come la baſe* CBD *della prima piramide, alla baſe* OMN *della ſeconda, così ſaranno tutti i priſmi fatti in quella, a tutti gli altrettanti priſmi fatti in queſta.*

Eſſendo diviſi per mezzo tutti i lati delle intiere piramidi, come nella coſtruzione della precedente Propoſizione, ſiccome ſono eſſe ugualmente alte, ancora i priſmi *FEHGDK*, *TRPQNV* ſono ugualmente alti; e però ſono come le loro baſi *FKD*, *TVN* b, e queſte ſono, come le intiere baſi *CBD*, *OMN* quadruple di tali triangoli; dunque i priſmi *FEHGDK*, e *TRPQNV*, ed ancora i due angoli *FEHGDK*+*FEHKCI*,

b Coroll. Pr. 32. XI.

e i

e i due uguali *TRPQNV* + *TRPVS*, sono, come le basi dell' intiere Piramidi, *CBD*, ed *QMN*. Che se si farà la costruzione stessa nelle piramidette *AEGH*, *LRPQ*, e nell'altre due *EBFI*, *RMTS*; i prismi dell' una a quelli dell' altra saranno pure, come il triangolo *EHG*. *RPQ* :: *BIF*. *MST* :: *CBD*. *QMN*; e così riuscirà sempre; dunque la somma di tutti i prismi, che si fossero inscritti nella Piramide *ABCD*, ed altrettanti inscritti nella Piramide *LMON* saranno sempre, come le basi di esse Piramidi *BCD*, *MON*. Il che ec.

PROPOSIZIONE V.

Le Piramidi triangolari ugualmente alte ABCD, LMON *sono, come le basi loro* BCD, MON.

IMperocchè fatta in essi la costruzione de' Prismi, *come nella precedente Proposizione*, riescono le somme di essi proporzionali alle basi *BCD*, *MON*: ma sono tali, che i primi due prismi sono maggiori della metà di esse piramidi [a], e gl'inscritti nelle piramidette residue sono più della metà di esse ec. dunque la piramide intiera *ABCD* all' ugualmente alta *LMQN* è nell'istessa proporzione delle basi *BCD*, *MON* [b]. Il che ec.

a 3. XI.

b *Corell. Pr.* 2. XII.

PROPOSIZIONE VI.

FIG. 215.

Le Piramidi ABCED, *ed* FHIKLG *ugualmente alte con qualsivoglia basi poligone* BCED, *ed* HGLKI *sono pure tra di loro come le dette basi*.

DIvidansi le basi poligone colle diagonali *CD*, *GI*, *GK* ne' suoi triangoli; si vedranno esse piramidi co' piani, che passano per la loro cima, e per dette diagonali, divise in tante piramidi triangolari ugualmente alte, le quali saranno, come le loro basi triangolari [a]; dunque componendo *BCED* a *CED* sarà come la piramide *ABCED* all' *ACDE*; ed è *CDE* a *GHI*, come *ACDE* ad *FHGI*; e similmente componendo, e convertendo *GHI* ad *HGLKI*, come *FHGI* ad *FHIKLG*; dunque per ugualità ordinata *BCED*.*HGLKI*::*ABCED*.*FHIKLG* (a), Il che ec.

a 5. XII.

PROPOSIZIONE VII.

FIG. 316.

Ogni prisma triangolare ABCDEF *può dividersi in tre piramidi uguali* ACBF, ACDE, CDEF.

SI tirino i diametri de' parallelogrammi *AC*, *CF*, *FD* i triangoli *ACB*, *ACD* essendo uguali, saranno pure uguali le piramidi ugualmente alte *ACBF*, *ACDE*; e parimente essendo uguali i triangoli *ADF*, *DEF*, sono pure uguali le piramidi *ACDE*, *CDFE* della medesima altezza a;

BCD . CDE :: ABCD . ACDE. (Pr. 5. XII.
e BCD + CDE . CDE :: ABCD + ACDE . ACDE (
cioè BCED . CDE :: ABCDE . ACDE: (Pr. 18. V.
ma CDE . HGI :: ACDE . FHGI: (P. 5. XII.
dunq; BCED . HGI :: ABCDE . FHGI: (Pr. 22. V.
ma HGI . HGLKI :: FHGI . FHGLKI; P. 5. XII P. 18. V.
sicchè BCED . HGLKI :: ABCDE . FHGLKI. (P. 22. V.

za [a]; dunque le tre piramidi, in cui resta diviso il prisma, sono tra loro uguali. Il che ec.

[a] 4. XII.

COROLLARIO. Quindi ogni Piramide è la terza parte del prisma eretto sopra l' istessa base alla medesima altezza, quantunque fossero le basi poligone, potendo risolversi in piramidi, e prismi triangolari dell' istessa altezza, eretti sopra i triangoli, in cui dividesi qualunque poligono.

PROPOSIZIONE VIII.

Le Piramidi simili triangolari ABCD, EFGH *sono in tripla ragione dei loro lati omologhi* AB, EF.

FIG. 217.

SI compiscano i parallelogrammi *CABK*, *GEFR* intorno a' lati de' triangoli simili *CAB*, *GEF*: ed intorno a' simili triangoli *CAD*, *GEH* i parallelogrammi *CADI*, *GEHP*; e parimente ne' simili triangoli *DAB*, *HEF* sieno compiuti i parallelogrammi *DABN*, *HEFO*; onde tirati i piani opposti, ne risulteranno due simili parallelepipedi *DICABNMK*, *HPGEFOQR*, i quali saranno in tripla ragione de' loro lati omologhi *AB*, *EF* [b]: ma essendo tali parallelepipedi doppi de' prismi *IDNBAC*, *PHOFEG* [c], e questi tripli delle piramidi *ABCD*, *EFGH* [d]; sono que' parallelepipedi sestupli di queste piramidi; dunque ancora esse piramidi simili sono in tripla ragione de' loro lati omologhi *AB*, *EF* (a). Il che ec.

[b] 33. XI.
[c] 28. XI.
[d] 7. XII.

 Co-

(a) I Parallelepipedi sono in tripla ragione de' lati omologhi. I Parallelepipedi sono proporzionali a' Prismi, perchè quelli sono doppj di questi: P. 28. XI. I Prismi sono pure proporzionali alle Piramidi, perchè quelli sono tripli di queste. Dunque i Parallelepipedi sono proporzionali alle Piramidi, e perciò anch' esse sono in tripla ragione de' lati omologhi.

CoROLLARIO. Ancora le piramidi ſimili di baſe poligona ſaranno in tripla ragione de' lati omologhi, perchè i poligoni ſimili dividendoſi in ſimili triangoli, ne riſultano ſimili piramidi triangolari, ciaſcuna copia eſſendo in tripla ragione de' lati omologhi, la quale rieſce la medeſima in ciaſcuna copia de' lati corriſpondenti in qualunque triangolo; e però la ſomma di tali piramidi triangolari erette ſopra un poligono alla ſomma di altrettante ſimili erette ſopra l' altro poligono ſimile è pure in tripla ragione de' loro lati omologhi.

PROPOSIZIONE IX.

Le Piramidi triangolari uguali hanno le baſi reciproche dell' altezze: e quelle Piramidi, le cui baſi ſono delle altezze loro reciproche, ſono pure uguali.

IMperocchè eſſendo le piramidi la terza parte de' priſmi eretti ſopra all' iſteſſe baſi, e alle medeſime altezze [a]; quando le piramidi ſono uguali, ſono pure uguali i priſmi; e quando i priſmi ſono uguali, ſono altresì uguali le piramidi; ma i priſmi uguali hanno le baſi reciproche dell'altezze, e ſe le loro baſi ſono reciproche dell' altezze, e i priſmi ſono uguali [b]; dunque ancora le piramidi, ſe uguali ſono, hanno le baſi reciproche delle altezze, e ſe le baſi loro ſono reciproche dell' altezze, debbono eſſere Piramidi uguali. Il che ec.

a 7. XII.

b Coroll. Pr. 34. XI.

CoROLLARIO I. Ancora le Piramidi, che hanno le baſi poligone, ſe ſono uguali, avranno le baſi reciproche all' altezze; e viceverſa eſſendo le baſi

reci-

reciproche all'altezze, saranno Piramidi uguali; perchè se avessero la base triangolare uguale a quel poligono, con le medesime altezze, sarebbero uguali tra loro [a], ed uguali ad esse; dunque ciò, che conviene alle Piramidi triangolari, ancora appartiene alle Piramidi poligone, che sarebbero le medesime, se cangiassero le basi poligone in triangoli uguali ad esse.

a 6. XII.

COROLLARIO II. Lo stesso pure vale de' prismi eretti sopra basi poligone, che essendo uguali, avrebbero reciproche le basi all'altezze; e viceversa, come accade alle Piramidi, che sono le loro terze parti.

PROPOSIZIONE X.

FIG. 111.

Il cono è sempre la terza parte del Cilindro alla medesima altezza eretto sopra l' istessa base circolare EHM.

SE si concepisce un prisma eretto sopra il quadrato *EHGF* inscritto nel cerchio alla medesima altezza del cilindro, sarà quel prisma più della metà del cilindro, essendo appunto la metà di quell' altro prisma, che si alzasse alla medesima altezza sopra il quadrato del diametro *EG*, che essendo circoscritto al cerchio, farebbe riuscire il prisma circoscritto al cilindro, e però maggiore di esso; e similmente la piramide eretta all' istessa altezza sopra all' inscritto quadrato *EHGF*, sarebbe la metà della piramide, che avesse per base il quadrato del diametro *EG*, la quale sarebbe circoscritta al cono; e però la piramide sopra alla base *EHGF* dovrà essere maggiore della metà

del

del cono. Similmente fatti i triangoli *EOH*, *HNG* ec. che sono più della metà de' segmenti circolari, cui sono inscritti, eretti sopra di essi i prismi all'altezza del cilindro, e le piramidi all'istessa cima del cono, saranno que' prismi più della metà degli eccessi del cilindro sopra il prisma quadrato, essendo la metà dei prismi eretti sopra un rettangolo, come *HPQG* circoscritto al segmento circolare *HNG*, il qual prisma circoscritto sarebbe a quell'eccesso cilindrico: e similmente le piramidi sopra tali triangoli saranno più della metà degli eccessi del cono sopra la piramide quadrata inscrittagli, e così sempre; dunque il cilindro al cono stà, come il prisma eretto alla medesima altezza sopra qualunque poligono inscritto nel cerchio, alla piramide ugualmente alta eretta sopra lo stesso poligono [a]; la qual porzione è sempre tripla [b]; dunque il cilindro è sempre triplo del Cono, onde il Cono è la terza parte del cilindro. Il che ec.

a *Coroll.* 2. *Prop.* 2. XII

b *Cor. Pr.* 7. XII.

PROPOSIZIONE XI.

FIG. 212.

I cilindri ugualmente alti sono come i cerchj ABT, EHM *delle loro basi; e così pure sono i coni sopra all'istesse basi circolari eretti alla medesima altezza.*

ESsendosi dimostrato, che i prismi eretti sopra i quadrati *ABCD*, *EHGF* inscritti ne' circoli, alla medesima altezza de' cilindri, ne sono più della metà di essi, ed i prismi pure eretti sopra gli altri triangoli, all'istessa altezza sono più della metà degli eccessi cilindrici sopra gli antecedenti

prismi

prismi ec. e tali prismi essendo sempre, come le loro basi, se sono ugualmente alti [a], le quali basi poligone simili sono, come i medesimi circoli [b]; perciò ancora i cilindri ugualmente alti sono, come le loro basi circolari; ed i Coni parimente, che sono la terza parte di essi cilindri, sono in pari altezza proporzionali a' cerchj delle loro basi. Il che ec.

[a] Coroll. Pr. 32. XI.
[b] Coroll. 1. Pr. 2. XII.

Corollario. Quindi può dirsi, che i Cilindri, o i Coni di uguale altezza sono come i prismi, o come le piramidi ugualmente alte fatte sopra simili poligoni inscritti nelle basi circolari di essi Coni, o Cilindri; essendo tanto questi, che quelli, come i quadrati de' diametri circolari, proporzionali alle basi de' poligoni, o de' cerchi stessi.

PROPOSIZIONE XII.

I cilindri simili ABDC, EFHG, *o i Coni simili inscritti in essi, sono in ragione tripla de' diametri* CD, GH *delle loro basi.*

FIG. 218.

DAll' asse del maggiore *MI* si tagli la parte *IN* uguale all'asse *KL* del minore, e per lo punto *V* si faccia passare un piano parallelo alla base, che ci farà il cerchio *QR*. Indi s' intenda eretto un prisma sopra il poligono *CODP* inscritto nella base circolare, che pervenga all' altezza dell'asse *TI*, ed all' altezza *NI*; e nella base *GVII* dell' altro cilindro sia pure un simile poligono inscritto *GVHX*, ed elevato all' altezza del cilindro *LK*. Il prisma dell' altezza *MI* a quello dell' altezza *II* sarà, come *MI* ad *NI* [a] = *LK*: ma *MI* . *K* :: *CD* . *GH* (per la similitudine de' cilin-

[a] Coroll. 2. Pr. 25. XI.

cilindri; dunque il prisma dell' altezza *MI* a quello dell' altezza *NI* è, come semplicemente *CD* a *GH*. Ma il prisma dell' altezza *NI* all' altro inscritto dentro il minor cilindro, dell' uguale altezza *LK*, è, come la base *CODP* alla simile base *GVHX*[a], cioè come il quadrato *CD* al quadrato *GH*[b], e però in ragion dupla di *CD* a *GH*; dunque la ragion del prisma dell' altezza *MI*, a quello dell' altezza *LK* è composta della semplice, e della dupla della ragione de' diametri; e però è in ragione tripla di essi *CD*, *GH*. Ma questi prismi accostandosi indefinitamente a' cilindri, cui sono inscritti, secondo che si aumenta il numero de' lati delle loro basi, come tante volte si è dimostrato, debbono avere la ragione medesima, che detti cilindri[c]; dunque essi cilindri simili sono pure in ragion tripla de' loro diametri *CD*, *GH*. Ma i coni simili inscritti in detti cilindri, essendo la terza parte di essi[d], sono nell' istessa ragione di essi cilindri; dunque sono in tripla ragione de' diametri delle loro basi *CD*, *GH*. Il che ec.

a Coroll. Pr. 32. XI.
b 1. XI.
c Coroll. 2 Pr. 2. XII.
d 10. XII.

COROLLARIO. E' manifesto essere tanto i cilindri, che i coni simili in tripla ragione ancora de' loro assi proporzionali a' diametri.

PROPOSIZIONE XIII.

Se un cilindro è segato con un piano parallelo alle basi, le sue porzioni saranno come i loro assi.

SIccome se nel cilindro fosse inscritto un prisma, la cui base fosse qualsivoglia poligono inscritto nella base cilindrica, segandosi esso ancora

con

con l'isteſſo piano parallelo alla baſe, ſaranno le ſue porzioni proporzionali alle lunghezze [a], cioè agli aſſi cilindrici; così ancora le porzioni cilindriche ſono come i detti aſſi, perchè i cilindri ſono come i priſmi di ſimil baſe, inſcritti ne' medeſimi, come altre volte ſi è dimoſtrato.

[a] Coroll. 1. Pr. 25. XI.

PROPOSIZIONE XIV.

I Coni, e i Cilindri di baſe uguale ſono tra loro, come le altezze.

QUanto a' cilindri di baſe uguale, è, come ſe foſſero porzioni ſegate dal medeſimo cilindro col piano parallelo alla baſe; che però eſſendo come i loro aſſi, [b], ſono come le altezze; e quanto a' coni, che ſono un terzo de' cilindri, a' quali ſono inſcritti [c], è chiaro dover eſſere ancor eſſi nell' isteſſa ragione degli aſſi.

[b] 13. XII.

[c] 10. XII.

PROPOSIZIONE XV.

TAV. XII. FIG. 219.

Ne' coni, o cilindri uguali BAC, EDF *le baſi* BC, EF *ſono reciproche all' altezze, cioè come* DM *ad* AL: *e viceverſa qualunque volta ſieno reciprocamente* BC . EF : : MD . AL; *que' coni, o cilindri ſaranno uguali.*

SE le altezze cilindriche ſono uguali, ancora le baſi ſaranno uguali negli uguali cilindri: eſſendo poi diſuguali, dalla maggiore *DM* ſi tagli la *OM* uguale alla minore *AL*, e ſi tagli il cilindro col piano *IH*, condotto per lo punto dell' aſſe *O*, parallelo alla baſe *EF*. Sarà *DM . OM*

(= *AL*)

a 14. XII b 11. XII.

$(=AL)$ :: $NKF(=GPC)$. IHF [a] :: BC . EF [b]; dunque DM . AL :: BC . EF: e viceversa se DM . AL :: BC . EF, posta $OM = AL$, sarà NKF . IHF :: DM . OM $(=AL)$ :: BC . EF :: GPC . IHF; dunque $NKF = GPC$. E l'istesso accade ne' Coni, che sarebbero la terza parte di essi cilindri [a]. Dunque ec.

PROPOSIZIONE XVI. PROBL.

FIG. 220.

Dati due cerchi concentrici ABD, LME; *inscrivere nel maggior un poligono di pari lati, che non tocchi il cerchio minore.*

Tirato pel centro C il diametro ACB segante il cerchio interiore in LE; gli si conduca

---

(a) *Prima Parte.*

	DM .	OM	::	NKF .	IHF,	(*Pr.* 14. XII.
e	DM .	AL	::	GPC .	IHF:	(*Pr. medesima e Ipot.*
ma	GPC .	IHF	::	BC .	FE;	(*Pr.* 11. XII.
sicchè	DM .	AL	::	BC .	FE.	(*Pr.* 11. V.

Dunque le altezze sono reciproche delle basi per la Defin. 2 VI.

Seconda Parte.

DM . AL :: BC . FE;
sarà DM . OM :: BC . FE,
essendo AL = OM per la Costruzione, e per la Dimostrazione fatta:

ma	DM .	OM	::	NKF .	IHF;	(*Pr.* 14. XII.
dunque	BC .	FE	::	NKF .	IHF:	(*Pr.* 11. V.
ma	BC .	FE	::	GPC .	HIF;	(*Pr.* 11. XII.
sicchè	NKF .	IHF	::	GPC .	IHF;	(*Pr.* 11. V.
e perciò		NKF	=	GPC.		(*Pr.* 9. V.

ta la tangente *G E H* concorrente col maggior cerchio in *G*, ed *H*; indi segata la semicirconferenza *A D B* in due parti uguali nel punto *D*, si seghi pure l'arco *D B* pel mezzo in *N*, e l'arco *N B* dividasi nel mezzo in *K* fino a tanto che questa divisione riesca tra i punti *G*, e *B*. Tale sia il punto *K*, donde si tiri al diametro la perpendicolare *K I F*, che sarà parallela alla tangente *G E H*, (ciò s'inferisce dalla Prop. 18. III. e Prop. 28. I.) e gli archi *B K*, *B F* saranno tra loro uguali, e le corde loro *K B*, *F B* potranno replicarsi intorno la circonferenza del cerchio maggiore, la quale conterrà un numero pari di archi uguali a *B K*; e però ne riuscirà un poligono di lati uguali, e pari di numero, i quali non potranno toccare la periferia del cerchio interiore, siccome non viene toccata nè meno dalla retta *K F* sottesa a' due lati, essendo parallela alla tangente *G H* di quella periferia; il che riuscirà in qualunque altro sito di esso poligono. Il che ec.

PROPOSIZIONE XVII. PROBL.

Date due sfere concentriche, i cui raggi C B, C E; *descrivere nella maggiore un solido poliedro, i cui piani non tocchino la superficie della sfera minore.* FIG. 220.

SEgate esse sfere con un piano, che passi pel centro *C*, ne riusciranno due cerchj concentrici, nel maggiore de' quali può descriversi un poligono, che non tocchi la periferia del minore a. Sia *B K* uno de' lati di tale poligono; ed eretto perpendicolare al piano di questo cerchio

a 16. xi.

il

il semidiametro *CA*, si tirino nella sfera i piani *ALK*, *AHB*, che saranno quadranti perpendicolari a quel cerchio a, ed in essi quadranti si applichino pure le corde *KO*, *OL*, *LA*, ed *AH*, *HD*, *DB* uguali al lato *BK*, e si congiungano le rette *DO*, *HL*; il che se si facesse da per tutto, ne riuscirebbe un intiero poliedro, il quale non toccherà in verun luogo l'interiore superficie della sfera minore *NSME*. Imperocchè condotte le *OF*, *DI* perpendicolari alle comuni sezioni *CK*, *CB* de' detti quadranti col cerchio *CBK*, le quali saranno parallele ad *AC*, e perpendicolari al medesimo piano circolare, onde parallele tra di loro, ed ancora uguali, perchè ne' triangoli *OKF*, *DBI* oltre gli angoli retti in *F*, ed *I*, sono uguali gli angoli *K*, e *B* insistenti alle semiperiferie diminuite degli archi uguali *OK*, *DB*; e però essendo *OK*=*DB*, ancora gli altri lati saranno uguali, cioè *OF*=*DI*, ed *FK*=*IB*; però congiunte le rette *DO*, *IF* saranno parallele, ed uguali: ma *IF* è parallela a *BK*, segando dagli uguali raggi *CK*, *CB* le parti uguali *FK*, *IB*; dunque ancora *DO*, e *BK* sono parallele; e però le rette *OK*, *DB* sono nel medesimo piano; e similmente si proverebbe essere un piano *HLOD*, ed il triangolo *ALH*, onde ciò da per tutto continuato, sarebbe un poliedro inscritto nella sfera maggiore; e tirando dal centro *C* la perpendicolare *CG* al piano *BDOK*, congiunte le rette *GB*, *GK*, *GO*, *GD* saranno uguali, onde passerebbe un cerchio per i quattro punti *K*, *B*, *D*, *O*, mentre i quadrati di qualunque di tali linee, col medesimo quadrato della perpendicolare *CG*, fanno il quadrato del raggio della sfe-

a 18. XI.

ra:

ra; ma essendo BK maggiore d' IF, e però maggiore di DO, e le altre OK, e DB uguali a BK; dunque nel cerchio, che passerebbe per i punti K, B, D, O, la BK sottende più di un quarto; e però il quadrato BK è più che doppio del quadrato GK, essendo l' angolo BGK ottuso: ma congiunta la KI, che sarà perpendicolare ad IB, essendo l' angolo $KBI = DBI$, il lato $BK = BD$, ed il lato BI comune, onde ne' triangoli KBI, DBI sarà $IK = ID$, e l' angolo BIK uguale al retto BID, ed è la IK maggiore della BI (essendo IK media proporzionale tra le parti del diametro, di cui l'una è BI, l'altra sarebbe $IC + CB$ assai maggiore di IK); dunque il quadrato BK è meno che doppio del quadrato IK; e però la GK è minore di IK, onde la CG sarà maggiore di CI, essendo tanto i due quadrati CG, e GK, quanto i due CI, ed IK uguali al quadrato del raggio CK. Onde è più lontano il punto G, che il punto I dalla superficie della sfera CEM; ed essendo la IK lontana dall' arco EM, riuscendo parallela alla sua tangente a, il piano $DBKO$ sarà più remoto dalla superficie di quella interna sfera minore, e così ancora gli altri piani $HDOL$, AHL molto meno potranno toccare detta superficie, essendone più lontani; e però tutto il Poliedro sarà come cercavasi di fare. Il che ec.

a 16. XI.

PROPOSIZIONE XVIII.

Le sfere sono in triplicata ragione de' loro diametri.

FIG. 221.

Im-

IMperocchè fatto ancora nella sfera minore un simile poliedro al descritto nella maggiore, questi saranno in tripla ragione de' raggi delle loro sfere, perchè la piramide, che avesse la base *DBKO*, e la cima in *C*, sarà simile alla piramide, la di cui base è il simile quadrilineo *PEMQ*, e la stessa cima in *C*: e parimente l'altra piramide, la di cui base *HDQL*, è simile alla piramide, la di cui base *RPQS*, colla stessa cima in *C*; e così l'altre, dunque essendo queste in tripla ragione di quella de' loro lati omologhi, ancora la somma di esse, cioè il poliedro della sfera *AKB*, alla somma dell' altre simili, che sarebbe il simile poliedro della sfera *NME*, starà in ragione tripla de' raggi *CB*, *CE*, o de' diametri di esse sfere; e ciò accaderebbe in qualunque numero di piani fossero divisi i poliedri similmente descritti in esse sfere: e perchè possono essere fatti di tanti piani, che non tocchino la superficie di qualunque interna sfera minore, ma differente dalla maggiore d'una quantità minima; quindi essi poliedri possono differire dalle dette sfere d'una grandezza minore di qualunque data; però avendo sempre essi poliedri simili la ragione tripla di quei diametri, ancora le sfere saranno nell' istessa ragione a. Il che dovea dimostrarsi.

a Cor. 2. Pr. 2. XI.

PRE-

PREFAZIONE

AL LIBRO XIII.

DEGLI ELEMENTI

DI EUCLIDE.

QUello, che Euclide dimostrò nel suo Libro X., il quale è di tutti gli altri il più prolisso contenendo in se CXVII. Proposizioni, fu con mirabil magistero dal nostro celebratissimo Autore compendiato, e ridotto a sole XVIII. Proposizioni. Avvi però tra 'l Libro X. d' Euclide, ed il presente Libro XIII. del P. Ab. Grandi questo divario, che dove in quello si espongono le varie specie, e le affezioni delle gradezze commensurabili, o incommensurabili; in questo dimostransi quelle principali proprietà, che alle grandezze incommensurabili si appartengono.

Commensurabili diconsi quelle grandezze, che hanno una misura comune, come appunto sarebbero due linee, delle quali una fosse di tre palmi, e l'altra di otto; poichè il palmo è misura comune sì della prima, come della seconda; ond' è, che la proporzione, che passa tra due linee commensurabili, chiamasi da Geometri *Razionale*. Per l' istessa ragione due quali si vogliano numeri intieri sono fra loro commensurabili, mentre l' unità è comune loro misura; perlochè la ragione, che è tra due intieri numeri quali si sieno, dee sempre dirsi *Razionale*. Quindi si viene altresì in cognizione delle quantità *Incommensurabili*, le quali non per altro con un tal nome distinguonsi, se non perchè esse non hanno una misura comune, o per maggior chiarezza, perchè non può trovarsi e determinarsi una terza quantità, che sia comune misura d' entrambe; sicchè la proporzione, che è fra l' una, e l' altra di queste quantità, *Irrazionale* addimandasi; com' è appunto la ragione che passa tra 'l diametro del quadrato, ed uno de' lati del medesimo; non potendosi rinvenire numeri tali, che i loro quadrati sieno in proporzione di 16 a 8., mentre il numero 8. non risulta da verun numero in se stesso moltiplicato. *Irrazionale* pure debbe chiamarsi la proporzione, che è fra le parti della linea segata, secondo l' estrema, e media ragione, le di cui maravigliose proprietà sono quì esposte con inarrivabile chiarezza, e brevità.

ELE-

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE
LIBRO XIII.

PROPOSIZIONE I.

FIG. 222. *Se la retta* AB *è divisa in* C *secondo l' estrema, e media ragione* (a), *al maggiore segmento* CA *aggiunta l'* AD *uguale alla metà di tutta l'* AB *sarà il quadrato di essa* CD *quintuplo del quadrato della metà di tutta l'* AB.

Imperocchè posta AF uguale alla metà di AB, e perpendicolare ad essa, congiunta BF, e a FB, posta uguale FG, ed indi dalla porzione AG descritto il quadrato $AGIC$ segante l' AB in C; questa è la costruzione, che determina la divisione di AB in C in maniera, che sia il quadrato $AC = ABC$ rettangolo di tutta nel resto a; il che rende segata AB in C secondo l' estrema, e media ragione, per essere AC media proporzionale tra l' intiera AB, e la residua BC. Dunque

a Prop. 11. Lib. 11.

(a) Si suppone adunque, che BA . AC :: AC . CB; Defin. 3. Lib. VI.

que essendo $GA = AC$, ed $AD = AF = \frac{1}{2} AB$; sarà $CD = FG = FB$: ma posta $AF = 1$, ed $AB = 2$, il cui quadrato $= 4$, il quadrato $FB =$ a' quadrati d' AF, e d' $AB = 1 + 4 = 5$; dunque ancora il quadrato CD è quintuplo del quadrato AD, cioè del quadrato della metà di AB. Il che ec.

PROPOSIZIONE II.

FIG. 223.

Se la retta CD *ha il suo quadrato quintuplo del quadrato* AD *posta l'* AB *dupla di* AD, *sarà divisa in* C *secondo l'estrema, e media ragione, il di cui maggiore segmento sarà la* AC.

IL quadrato CD è uguale a' quadrati AD, AC, ed a' due rettangoli DAC [a]; dunque essendo $BA = 2\,AD$, sono i due rettangoli $DAC = BAC$; ed essendo il quadrato CD quintuplo del quadrato AD, siccome uguaglia i quadrati AD, ed AC, ed il rettangolo BAC, tolto di comune il quadrato AD, rimarrà il quadruplo del quadrato AD (che è il quadrato di AB doppia di AD) uguale al quadrato AC, ed al rettangolo BAC: ma è uguale al rettangolo $ABC + BAC$; dunque il quadrato $AC = ABC$, e però AC è media proporzionale tra AB, e BC, onde è il maggiore segmento della divisione di AB nella estrema, e media ragione. Il che ec.

[a] 4. XI.

FIG. 224.

COROLLARIO. Ancora posta dall' altra parte l' AB dupla di AD, il cui quadrato uguagli la quinta parte del quadrato CD, sarà la BC divisa in A secondo l' estrema, e media ragione, il di cui segmento maggiore è BA; perchè essendo

DC q. = 5 *AD* q. = *AD* q. + 2. *CAD* + *CA* q., e 2. *CAD* = *CAB*; saranno 4. *AD* q. (cioè *AB* q.) = *CAB* + *CA* q. = *BCA*; dunque è chiaro il proposto (a).

PROPOSIZIONE III.

FIG. 225.

Se il maggiore segmento AC *della retta* AB *divisa secondo l' estrema, e media ragione si dividerà per mezzo in* E; *la metà* EC *del maggior segmento col minor segmento* CB, *cioè la* EB, *può un quadrato quintuplo del quadrato* CE.

a 6. XI.

IMperocchè il quadrato *EB* è uguale al rettangolo *ABC* col quadrato *CE* [a]: ma *ABC* = *AC* quadrato, che è quadruplo del quadrato *CE*; dunque il quadrato *EB* uguaglia il quadrato *CE*, ed il quadruplo di esso: e però è quintuplo del quadrato *CE*. Il che ec. PRO-

---

(a) E' $\overline{DC}^2 = 5\ \overline{AD}^2$:

ma $\overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 + 2\ CAD$:

dunq; $5\ \overline{AD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 + CAB$:

onde $4\ \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + CAB$,

cioè $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + CAB$:

ma $\overline{AC}^2 + CAB = BCA$; (*Pr.* 3. II.

dunque $\overline{AB}^2 = BCA$,

e perciò CB . BA :: BA , AC; (*Pr.* 17. VI.

onde BC è divisa nel punto A secondo l' estrema e media ragione.

PROPOSIZIONE IV.

Il quadrato di tutta l' AB, *col quadrato di* CB *segmento minore di essa divisa secondo l'estrema, e media ragione, sono tripli del quadrato del segmento maggiore* AC. FIG. 226.

I Due quadrati *AB*, e *BC* sono uguali a due rettangoli *ABC* col quadrato *AC* a; ma il rettangolo *ABC* = *AC* quadrato; dunque i due quadrati *AB*, *CB* sono uguali a' due quadrati *AC* col quadrato medesimo *AC* un' altra volta preso, e però sono uguali al triplo di esso quadrato *AC*. Il che ec.

a 7. XI.

PROPOSIZIONE V.

Alla retta linea AB *divisa in* C *secondo l'estrema, e media ragione, aggiunta l'* AD *uguale al maggiore segmento* AC; *sarà la* BD *divisa pure in* A *secondo l'estrema, e media ragione, il di cui maggior segmento sarà l' intiera* AB. FIG. 227.

ESsendo *AB* ad *AC*, cioè all' *AD*, come *AC* a *CB*; convertendo sarà *DA*. *AB* :: *BC*. *CA*; e componendo *DB*. *BA* :: *BA*. *AC*=*AD*; dunque il quadrato *AB*=*BDA*, e però la *BD* è divisa in *A* secondo l'estrema, e media ragione, il di cui segmento maggiore è l' *AB*. Il che ec.

PROPOSIZIONE VI.

L' uno, e l' altro segmento, il maggiore AC, *ed il minore* CB *della retta* AB *proposta, e* FIG. 228.

 di-

divisa in C secondo l' estrema, e media ragione sono incommensurabili, non solo in lunghezza, ma ancora in potenza; cioè non sono come numero a numero nè essi segmenti, nè i loro quadrati.

IMperocchè aggiunta al segmento maggiore AC l' $AD = \frac{1}{2} AB$, presa $AD = 1$, il quadrato CD è quintuplo di esso quadrato AD [a]; dunque essa $CD = \sqrt{5}$; onde $AC = \sqrt{5} - 1$, e la $BC = DB - DC = 3 - \sqrt{5}$, essendo DB tripla di AD. Ora nè $\sqrt{5} - 1$ a $3 - \sqrt{5}$ può avere alcuna proporzione commensurabile di numero a numero, non potendosi determinare in numero, nè in frazione di numeri, la radice quadra di cinque, non essendo verun quadrato quintuplo d'un altro quadrato; nè il quadrato della prima, che sarebbe $5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$, può essere commensurabile al quadrato dell' altra $= 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$, non essendo nè meno questi come numero a numero, ma in ragione di $3 - \sqrt{5}$ a $7 - 3\sqrt{5}$ (divisi per mezzo essi quadrati); dunque AC, e CB sono in lunghezza, ed in potenza incommensurabili (a). Il che ec.

a 1. XIII.

PRO-

(a) Per più facilmente concepire, e dimostrare questa Proposizione, è da avvertirsi primieramente, che due grandezze diconsi *incommensurabili*, qualora non possa determinarsi una terza grandezza, che sia comune misura di ambedue quelle grandezze.

Secondariamente è da notarsi, che quella linea, la quale moltiplicata in se stessa produce il quadrato, chiamasi *Radice* del quadrato istesso, che ne risulta: così per cagion d' esempio dato un numero, che moltiplicato in se medesimo produca il 4. quel numero, cioè il 2 dicesi la *Radice* del 4.

In terzo luogo bisogna rammen-

mentarsi delle regole assegnate nella spiegazione del secondo Libro di questi Elementi, e risguardanti la moltiplicazione.

Ciò presupposto dando io principio alle prove della suddetta Proposizione;

Si aggiunga al segmento maggiore AC la retta AD uguale alla metà di AB, e posta AB uguale a 2, sarà l' AD uguale ad 1, onde il quadrato CD, che è 5, verrà ad essere quintuplo del quadrato AD (Pr. 1. XIII.,) che è 1; e perciò la linea CD sarà uguale alla radice del 5. Passo quindi a determinare, a che equivagliano numericamente i due segmenti AC, CB della linea AB supposta divisa in C secondo l'estrema, e media ragione.

I. E rifacendomi dal segmento maggiore AC; uguagliando esso la CD meno la DA, è manifesto essere il medesimo equivalente in numeri alla radice del 5, (perchè $CD = \sqrt{5}$) meno 1 (perchè $DA = 1$;) dunque potrà esprimersi così:

$$\text{Il segmento maggiore } AC = \sqrt{5} - 1.$$

Il segmento poi minore CB guagliando la DB meno però la DC, è chiaro, essere il medesimo equivalente in numeri a 3 (perchè DB, come composta di $DA = 1$, e di $AB = 2$, equivale a 3) meno la radice del 5: (perchè $DC = \sqrt{5}$): lo che potrà in tal guisa enunciarsi:

$$\text{Il segmento minore } CB = 3 - \sqrt{5}.$$

$$\text{Dunque } AC = \sqrt{5} - 1;$$
$$\text{e } \quad CB = 3 - \sqrt{5}.$$

Ma la $\sqrt{5} - 1$ a $3\sqrt{5}$ non può avere alcuna proporzione commensurabile di numero a numero, non potendo determinarsi in numeri, nè in frazione di numeri la radice quadra di 5.; mentre non vi è quadrato alcuno, che sia quintuplo d' un altro quadrato: sicchè i due segmenti AC, e CB sono in lunghezza incommensurabili, vale a dire non sono come numero a numero.

II. Facendo io ora passaggio a dimostrare, che questi medesimi segmenti sono anche incommensurabili in potenza, cioè che anche i loro quadrati sieno incommensurabili; formisi primieramente il quadrato del maggiore segmento AC:

$$AC = \sqrt{5} - 1 \times \sqrt{5} - 1$$

Si moltiplichi la radice del 5 meno uno 1 per la radice del 5 meno 1: in questa operazione, e nell'altra consecutiva, che dee farsi, è necessario moltiplicare ciascuno dei termini, che ne seguono dopo questo segno X della moltiplicazione, per tutti i termini, che precedono il medesimo segno.

A tale operazione accingendomi:

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$
$$\sqrt{5} \times -1 = -\sqrt{5}$$
$$-1 \times \sqrt{5} = -\sqrt{5}$$
$$-1 \times -1 = 1:$$

Ed ecco terminata l'operazione produttrice del quadrato del maggior segmento; onde uniti insieme tutti quei prodotti, che sono dopo questo segno = d' uguaglianza, si avrà il quadrato d' AC, qual' è il seguente.

$$\overline{AC}^2 = 6 - 2\sqrt{5}.$$

Venghiamo ora all' altra operazione produttrice del quadrato del segmento minore CB.

$$CB = 3 - \sqrt{5} \times 3 - \sqrt{5}.$$

Si moltiplichi il 3 meno la radice del 5 per 3 meno la stessa radice del 5, ed avremo il quadrato del segmento minore CB.

L' operazione è la seguente.

$$3 \times 3 = 9$$
$$3 \times -\sqrt{5} = -3\sqrt{5}$$
$$-\sqrt{5} \times 3 = -3\sqrt{5}$$
$$-\sqrt{5} \times -\sqrt{5} = 5.$$

Terminata pertanto l'altra operazione produttrice del quadrato del segmento minore, si uniscano insieme tutti questi prodotti, ed avremo il quadrato di CB, qual' è il seguente:

$$\overline{CB}^2 = 14 - 6\sqrt{5}.$$

PRO-

PROPOSIZIONE VII.

Nel pentagono equilatero ABCDE *se vi sono tre angoli contigui, o non contigui tra di loro uguali; gli altri angoli pure saranno uguali ad essi.* FIG. 229.

Essendo uguali i lati *EA*, *AB*, *BC*, *CD*; se gli angoli contenuti tra essi *A*, *B*, *C*; sono uguali; sottese le basi *EB*, *AC*, *BD*; saranno pure tra di loro uguali; dunque gli angoli *AEB*, *CAB*; *ABE*; *CBD*, *BCA*, *CDB* sono uguali; dunque *BF* = *FA*; e la rimanente *FE* = *FC*; onde i triangoli *FED*, *FCD* hanno tutti i lati uguali, e però l' angolo *FCD* = *FED*, ed aggiunti gli uguali *AEB*, *ACB*; l' angolo *AED* sarà uguale a *BCD*: Similmente si proverebbe *CDE* = *ABC* (a); dunque tutti gli angoli del pentagono saranno uguali.

Se poi fossero uguali gli angoli *BCD*, *CDE* al non contiguo *EAB*; riuscendo colle sottese *DB*

Ridotti ambedue questi quadrati a termini più semplici, con dividere l'uno, e l' altro pel mezzo; il primo, che è $\overline{AC}^2$, equivarrà a

$$3 - \sqrt{5}$$

Il secondo, che è $\overline{CB}^2$, a $7 - 3\sqrt{5}$

Ma paragonati insieme anche questi due quadrati, non può determinarsi una grandezza, che sia di essi misura comune; dunque anche i quadrati dei segmenti sono incommensurabili, come dovea in secondo luogo dimostrarsi.

(a) L' Angolo EFC è esterno del triangolo FBC; dunque esso è uguale agli angoli CBF, BCF, oppure ABF *per la dimostrazione*. Ma l' angolo EFC uguaglia EDC; dunque quest' angolo sarà uguale a' due CBF, ABF, vale a dire a tutto l' angolo ABC. Il che ec.

DB, *EB* gli angoli *AEB*, *BDC* uguali, e per esſere *BE* = *BD*, ancora eſſendo *BDE* = *BED* dunque tutto l' angolo *AED* = *CDE*, e però ſono ancora tre angoli contigui uguali, onde tutti gli altri ſono uguali. Il che ec.

PROPOSIZIONE VIII.

FIG. 230. *Nel pentagono equilatero* ABCDE, *che ancora ſia equiangolo, ſottese due rette* BD, CE *a due angoli contigui, ſi ſegheranno in* F *ſecondo l' eſtrema, e media ragione; ed i loro maggiori ſegmenti* BF, EF *ſaranno uguali ad un lato* BC, *ovvero* ED *di eſſo pentagono*.

CIrcoſcritto ad eſſo pentagono un circolo *ABD*, gli archi ſotteſi da' lati di eſſo ſono uguali; dunque l'angolo *FCD* = *FDC*, e l' eſterno *BFC* ſarà duplo di ciaſcuno di eſſi, cioè = 2 *FCD*: ma eſſendo pure l'arco *BAE* doppio di *ED*, ancora l' angolo *BCF* = 2 *FCD*; dunque *BFC* = *BCF*; e però *BF* = *BC*: ed eſſendo i triangoli *BCD*, *FCD* equiangoli, ſarà *BD*.*DC* (= *BF*) :: *DC* (= *BF*).*FD*; dunque *BD* è diviſa in *F* ſecondo l' eſtrema, e media ragione, ed il maggiore ſegmento è *BF* = *BC*; e l' isteſſo ſi dimoſtrerà di *CE*, che ſia diviſa in *F* in ragione media, ed eſtrema, eſſendo *CE*.*EF* :: *EF*.*FC*, ed *EF* = *CD*. Il che ec.

PROPOSIZIONE IX.

FIG. 231. *Se il lato* AB *del decagono inſcritto nel cerchio* ABE *ſi congiunga col lato dell' eſagono uguale a* BD, *cioè al raggio* CA *di eſſo circolo; ſarà ſegata*

ta l' AD *in* B *secondo l'estrema, e media ragione, il di cui maggiore segmento sarà* BD *uguale al lato dell' Esagono.*

TIrato il diametro ACE, e congiunte le rette CB, CD, essendo l'arco AB la quinta parte della semiperiferìa ABE, e però BE quadruplo di AB, l' angolo ECB sarà quadruplo di ACB: ma il medesimo ECB è duplo di ABC, ed ABC è duplo di BCD; (essendo non solamente $BC = CA$, ma ancora $= BD$, lato dell'esagono) dunque ECB è quadruplo ancora dell' angolo BCD; sarà dunque $ACB = BCD$, e l' angolo $DCA = DAC = ABC$, essendo ciascuno doppio di BCD, però $DC = DA$: ma $DC . CA :: DB . BA$ [a], dunque ancora $AD . DB :: DB . BA$; onde AD è divisa in ragione media, ed estrema, il di cui maggior segmento è BD. Il che dovea dimostrarsi.

a 3. VI.

PROPOSIZIONE X.

FIG. 231.

Il lato AB *del pentagono* ABDEF *equilatero, ed equiangolo ha il suo quadrato uguale al quadrato del lato* AH *del decagono inscritto nel medesimo cerchio, ed al quadrato del raggio* CH, *cioè del lato dell' esagono, che s' inscrivesse nel medesimo.*

SI conduca il diametro ACK, il quale dividerà per mezzo l' arco DE in K, e diviso pel mezzo l' arco AH in I, si congiungano al centro IC, e BC. Essendo l'arco $BD = AB$, doppio di AH, o di BH, e DK pure $= AH$, doppio di HI; dunque l' arco BDK è doppio di BHI,

però

però l' angolo $BCK = 2BCI = 2BAK$; dunque $BCL = BAC$, onde i triangoli ABC, e CBL, che hanno l'angolo B comune, sono equiangoli, e sarà $AB : BC :: BC . BL$; dunque il quadrato di $BC = ABL$. Congiunta pure la retta HL sarà uguale ad AL, perchè la CI divide la corda AH per mezzo, e ad angoli retti; onde il triangolo AHL sarà isoscele, simile all' altro HBA, per essere l'angolo $AHL = HAL = ABH$; e l'angolo A comune; dunque $AB : AH :: AH : AL$, e però il quadrato $AH = BAL$: ma il quadrato $AB = ABL + BAL$; dunque è uguale a' quadrati BC, (che è il raggio uguale al lato dell' esagono) ed AH, che è il lato del decagono. Il che ec.

PROPOSIZIONE XI.

FIG. 233. *Diviso il raggio d' un cerchio* CB *in* E *secondo l' estrema, e media ragione il di cui maggior segmento sia* CE; *il lato del pentagono regolare da inscriversi in esso cerchio è medio proporzionale tra il raggio* CB; *ed una retta composta da esso raggio, e dal segmento minore*, CB + BE: *che perciò dirassi esso lato del pentagono una* irrazionale minore *rispetto al raggio preso per razionale*.

DAl centro si alzi sopra il diametro AB la perpendicolare CD, e si congiunga DE, e prolungata EB in G, sia $BG = CB$. Essendo $AC = BC : CE :: CE : EB$, la somma degli antecedenti $BC + CE$ ($= AE$) alla somma de' conseguenti $CE + EB$ ($= AC$) sarà, come un antecedente CB, ovvero AC, ad un conseguente CE; dunque ancora

cora l' AE è divisa in C secondo l' estrema, e media ragione, essendo $AE . AC :: AC : CE$: ed il segmento maggiore AC essendo il lato dell' esazione da inscriversi in esso cerchio, sarà CE il lato del decagono, il quale è il segmento minore della retta divisa in tale estrema, e media ragione, il di cui maggiore segmento sia il lato dell'esagono [a]; dunque essendo il quadrato DE uguale al quadrato del raggio CD uguale al lato dell'esagono, ed al quadrato di CE lato del decagono, sarà DE il lato del pentagono [b]; e perchè $CBE = GBE$ uguaglia il quadrato CE, ed il quadrato BG uguaglia il quadrato DC, sarà il rettangolo EGB, che $= GBE + BG$ quadrato, uguale ai quadrati CE, e CD, cioè uguale al quadrato DE; dunque il lato DE del Pentagono è medio proporzionale tra BG, e GE, cioè tra il raggio del cerchio, e la retta composta del raggio, e del segmento minore BE di esso raggio CB diviso in E secondo l' estrema, e media ragione. Il che ec. E perciò esso lato del Pentagono *è una linea irrazionale minore*, così chiamata da Euclide.

[a] 9. XIII.

[b] 10. XIII.

PROPOSIZIONE XII.

Il quadrato del lato AB *d' un triangolo equilatero* ABD *inscritto nel cerchio è triplo del quadrato del raggio* AC.

Tav. XIII. Fig. 234.

SI tiri il diametro ACE, e si congiunga BE, che sarà un lato dell' esagono uguale al medesimo raggio AC; dunque i due quadrati AB, e BE essendo uguali al quadrato del diametro AE,

qua-

quadruplo del quadrato del raggio *AC*; tolti i due quadrati uguali *BE*, *AC*, rimane il quadrato *AB* triplo del quadrato *AC*. Il che ec.

PROPOSIZIONE XIII. PROBL.

FIG. 235. *Nella data sfera* ADFC *inscrivere un Tetraedro; cioè una Piramide composta da quattro triangoli equilateri, e dimostrare, che il quadrato del diametro* AC *di essa sfera è sesquialtero del quadrato del lato* AE *di esso Tetraedro* AEFG.

Sia *ADCE* un cerchio massimo della sfera; il di cui diametro *AC* si divida in *B*, di maniera che *BC* sia la sua terza parte; indi pel punto *B* si seghi la sfera col cerchio *GDE* perpendicolare al diametro *AC*, ed in questo cerchio descrivasi un triangolo equilatero *GEF*; quindi al vertice *A* si congiungano le rette *EA*, *FA*, *GA*. Questo sarà il Tetraedro ricercato *AEFG*; imperocchè tutti i lati *AE*, *AF*, *AG* sono tra di loro uguali, essendo il quadrato di ciascuno uguale a' quadrati dell' asse *AB*, e del raggio *BE*, ovvero *BF*, o *BG*; ed inoltre ciascuno è uguale a qualsivoglia lato del triangolo equilatero *GEF*, perchè *AC* . *AB* :: *AE* quadrato ad *AB* quadrato, ed *AB* . *BC* :: *AB* quadrato ad *EB* quadrato; dunque per l' ugualità ordinata *AC* . *BC* :: *AE* quadrato ad *EB* quadrato: ma *AC* è tripla di *BC*; dunque il quadrato *AE* è triplo del quadrato *EB*, raggio del cerchio *GDE*: ma del medesimo è triplo il lato *EF* del triangolo equilatero *GFE* a; dunque *AE* = *EF*, e così gli altri lati; e però

a 12. XIII.

sono

sono tutti equilateri i triangoli *AEF*, *AGF*, *AGE*, *GFE*; onde questo solido è un Tetraedro, ed il quadrato del diametro della sfera *AC* al quadrato del lato *AE* del Tetraedro è sesquialtero, essendo come *CA* ad *AB*, che è :: 3, 2, Il che ec.

PROPOSIZIONE XIV. PROBL.

Nella data sfera ADFB *inscrivere un Ottaedro da otto triangoli equilateri compreso: e dimostrare, che il quadrato del diametro* AB *della sfera è duplo del quadrato di qualunque lato* AE *dell'Ottaedro* AEBFDG. FIG. 236.

NEl cerchio massimo *ABDE* tirati i due diametri *AB*, *DE* tra di loro perpendicolari, si tiri ancora *FCG* perpendicolare al piano di esso, per cui, e per *DE* passerà un altro cerchio massimo *DFEG* perpendicolare all'altro, e congiunte le rette *AD*, *AF*, *AG*, *AE*, *BD*, *BF*, *BG*, *BE*, saranno tutte tra di loro uguali, perchè i loro quadrati uguagliano i due quadrati de' raggi, tirati dal centro a' loro termini, che tra di loro disposti sono ad angolo retto; e congiunte ancora le rette *FE*, *EG*, *GD*, *DF*, saranno uguali all'altre, perchè pure i loro quadrati sono uguali a' due quadrati de' raggi, al di cui angolo retto si oppongono; tutti adunque i triangoli *AFE*, *BEF*, *AFD* ec. sono equilateri, come ancora si raccoglie dall'essere ciascun lato la corda sottesa ad un quarto della periferìa del massimo cerchio; che però il solido *AEBFDG* è un ottaedro, ed il quadrato del diametro *AB* è duplo del quadrato del lato *EA*, es-

essendo a' due quadrati *E A*, *E B* uguale, i quali sono uguali tra loro. Il che ec.

PROPOSIZIONE XV. PROBL.

FIG. 237. *Nella data sfera inscrivere un Cubo da sei quadrati compreso* ANFOIDKB; *e dimostrare, che il quadrato del diametro* DF *della sfera sia triplo del quadrato di qualunque lato* AD *di esso cubo*.

NEl massimo cerchio *A B H* tirato qualunque diametro *F D*, si prenda *D E* uguale ad un terzo di esso, ed eretta la perpendicolare *E A*, congiunte le rette *A D*, *A F*, e compiuto il rettangolo *A F B D*, si seghi la sfera con due piani perpendicolari a quel cerchio *A B H*, tradotti per le rette *A F*, *D B*, che saranno due cerchj uguali *A N F O*, *D K B I* intorno gli uguali diametri *A F*, *D B*, a' quali si tirino gli altri diametri *O G N*, *I L K* perpendicolari, che li seghino ad angoli retti, e tirate le corde *A N*, *N F*, *F O*, *O A*, e *D K*, *K B*, *B I*, *I D* sottoposte ad uguali quadrati, e però uguali tra loro, si congiungano le altre rette *N K*, *O I* uguali pure all' altre *A D*, *F B*, sarà questo il Cubo ricercato; perchè essendo *F D* tripla della *D E*, ed il quadrato *F D* al quadrato *A D*, come *F D* a *D E*, sarà il quadrato *D F* (cioè i due *A F* ed *A D*) = al triplo del quadrato *A D*; e però il quadrato *A F* duplo sarà del quadrato *A D*: ma l'istesso quadrato *A F* è duplo del quadrato *A N*, essendo uguale alli due *A N*, *N F* tra di loro uguali; dunque *A D* è uguale ad *A N*, e però tutte le rette, che comprendono questo solido, sono uguali, e costituiscono sei quadrati *A D K N*, *N K B F*, *F B I O*,

FBIO, *OIDA*, *AOFN*, *DKBI* uguali, che contengono questo Cubo, e qualunque di tali quadrati, e la terza parte del quadrato del diametro della sfera, essendo il quadrato *DF* triplo del quadrato *AD*. Il che ec.

COROLLARIO. Essendo il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato dell' inscritto Tetraedro in ragione sesquialtera [a], cioè come 3 a 2; e lo stesso quadrato del diametro al quadrato del lato del cubo, come 3 ad 1; dunque il quadrato del lato del Tetraedro col quadrato del lato del cubo è uguale al quadrato del diametro della sfera, essendo $2 + 1 = 3$.

a 13. XIII.

PROPOSIZIONE XVI. PROBL.

FIG. 238.

Nella data sfera inscrivere un Icosaedro compreso da venti triangoli equilateri uguali; e dimostrare, che il diametro della sfera al lato dell' Icosaedro stà, come la somma del lato dell' esagono, e di due lati del decagono al lato del pentagono inscritto nel medesimo cerchio; perlochè chiamasi esso lato dell' Icosaedro da Euclide una linea Irrazionale minore.

SIa *CI* media proporzionale tra il raggio *CA* della sfera, e la quinta parte di esso, ed eretta sopra al diametro *AB* nel cerchio massimo *AEF* la perpendicolare *OID*, per lo centro *C* condotto l' altro diametro *DCF*, si conduca *FME* parallela ad *OID*, e per queste rette *DO*, *EF* si seghi la sfera con due piani perpendicolari a quel massimo cerchio, che faranno due cerchj uguali

DB, EB gli angoli AEB, BDC uguali, e per essere $BE = BD$, ancora essendo $BDE = BED$; dunque tutto l' angolo $AED = CDE$, e però sono ancora tre angoli contigui uguali, onde tutti gli altri sono uguali. Il che ec.

PROPOSIZIONE VIII.

FIG. 230. *Nel pentagono equilatero* ABCDE, *che ancora sia equiangolo, sottese due rette* BD, CE *a due angoli contigui, si segheranno in* F *secondo l' estrema, e media ragione; ed i loro maggiori segmenti* BF, EF *saranno uguali ad un lato* BC, *ovvero* ED *di esso pentagono.*

Circoscritto ad esso pentagono un circolo ABD, gli archi sottesi da' lati di esso sono uguali; dunque l'angolo $FCD = FDC$, e l' esterno BFC sarà duplo di ciascuno di essi, cioè $= 2FCD$: ma essendo pure l'arco BAE doppio di ED, ancora l' angolo $BCF = 2FCD$; dunque $BFC = BCF$; e però $BF = BC$: ed essendo i triangoli BCD, FCD equiangoli, sarà $BD . DC (= BF) :: DC (= BF) . FD$; dunque BD è divisa in F secondo l' estrema, e media ragione, ed il maggiore segmento è $BF = BC$; e l' istesso si dimostrerà di CE, che sia divisa in F in ragione media, ed estrema, essendo $CE . EF :: EF . FC$, ed $EF = CD$. Il che ec.

PROPOSIZIONE IX.

FIG. 231. *Se il lato* AB *del decagono inscritto nel cerchio* ABE *si congiunga col lato dell' esagono uguale a* BD, *cioè al raggio* CA *di esso circolo; sarà sega-*

ta

ta l' A D *in* B *secondo l' estrema, e media ragione, il di cui maggiore segmento sarà* B D *uguale al lato dell' Esagono.*

TIrato il diametro ACE, e congiunte le rette CB, CD, essendo l'arco AB la quinta parte della semiperiferìa ABE, e però BE quadruplo di AB, l' angolo ECB sara quadruplo di ACB: ma il medesimo ECB è duplo di ABC, ed ABC è duplo di BCD; (essendo non solamente $BC = CA$, ma ancora $= BD$, lato dell'esagono) dunque ECB è quadruplo ancora dell' angolo BCD; sarà dunque $ACB = BCD$, e l' angolo $DCA = DAC = ABC$, essèndo ciascuno doppio di BCD, però $DC = DA$: ma $DC . CA :: DB . BA$ [a], dunque ancora $AD . DB :: DB . BA$; onde AD è divisa in ragione media, ed estrema, il di cui maggior segmento è BD. Il che dovea dimostrarsi.

a 3. VI.

PROPOSIZIONE X.

FIG. 231.

Il lato A B *del pentagono* ABDEF *equilatero, ed equiangolo ha il suo quadrato uguale al quadrato del lato* A H *del decagono inscritto nel medesimo cerchio, ed al quadrato del raggio* C H, *cioè del lato dell' esagono, che s' inscrivesse nel medesimo.*

SI conduca il diametro ACK, il quale dividerà per mezzo l'arco DE in K, e diviso pel mezzo l' arco AH in I, si congiungano al centro IC, e BC. Essendo l'arco $BD = AB$, doppio di AH, o di BH, e DK pure $= AH$, doppio di HI; dunque l'arco BDK è doppio di BHI,

però

bedue le rette NL, NK secondo la media, ed estrema ragione, di cui i segmenti NP, NO sieno i maggiori, ed alzata al piano del quadrato $BCDE$ dal punto N la perpendicolare $VN = NP$, e condotta per lo punto V la SVR parallela a LK, si tirino nel piano RVN le rette OR, PS parallele, ed uguali ad NV, e prolungata VN in Z, posta $NZ = PL$, nel piano VNH si tiri ZT parallela a NH, e congiunta VH conveniente colla ZT in T, sieno tirate le rette TD, DR, TC, CS, e così sarà fatto un pentagono regolare $SRDTC$, i cui angoli giungeranno alla superficie sferica circoscritta a quel cubo, ed è nel piano delle due rette SR, CD tra di loro parallele, come parallele alla terza LK. E quanto all' ugualità de' lati si prova così. Congiunta la CP, il suo quadrato uguaglia i due quadrati CL, LP; onde essendo $CL = NL$, e LP il minore segmento di essa LN divisa secondo l' estrema, e media ragione, sarà il quadrato CP triplo del quadrato PN [1], ed aggiunto il quadrato $PS = PN$, sarà il quadrato CS quadruplo dell' altro PN; e però $PS = PO = SR$. Similmente DR si proverà uguale alla SR. Che poi ancora DT sia uguale a SR, tirata HQ parallella a NZ, le sarà uguale: ed essendo $HQ . QT :: VN . NH :: PN . NL :: LP . PN :: NZ$ $(= HQ) . VN$; dunque $QT = VN$, ed il quadrato HT uguaglia i quadrati HQ, e QT; dunque uguaglia i quadrati LP, PS: ed aggiunto il quadrato di $HC = CL = LN$, sarà il quadrato CT = a' quadrati PL, LC, e PS; e però lo stesso CT è uguale al quadrato CS, che ad essi è uguale. Similmente il quadrato DT è uguale a CS; dunque

[1] 4. XI

que tutti i lati del pentagono si provano uguali. Ancora gli angoli sono uguali, perchè essendo NL divisa secondo l'estrema, e media ragione in P, aggiuntovi $NO = NP$ maggiore segmento, sarà ancora OL divisa in N secondo l'estrema, e media ragione [a], il di cui maggior segmento sarà NL; e $NO = OR$ il minore; dunque i due quadrati LO, OR sono il triplo del quadrato NL [b]: ed aggiunto il quadrato $LC = NL$, sarà la somma de' quadrati OL, OR, LC, cioè OR, ed OC, oppure il quadrato CR uguale a 4 quadrati NL, cioè al quadrato LK, ovvero CD; dunque $CR = CD$: e lo stesso si dimostrerebbe di DS; però i triangoli CSR, CTD, DRS, essendo tutti i lati dell' uno uguali a' lati dell' altro, e le basi uguali, avranno gli angoli uguali, onde ancora gli altri due angoli del pentagono sono uguali a qualunque di questi tre [c]; però questo pentagono è regolare; e perchè il centro della sfera X è nel mezzo del cubo inscritto in essa, sarà $XN = LN$, e $NV = NP = NO$; dunque XV è pure divisa in N secondo l'estrema, e media ragione, il di cui minore segmento è $NV = VR$, onde i due quadrati XV, VR, cioè il quadrato XR è triplo del quadrato XN [d], onde XR è uguale al raggio della sfera, perchè il suo quadrato è triplo del quadrato della metà del lato cubico, siccome il quadrato del diametro è triplo del quadrato dell' intiero lato di esso cubo [e]; e similmente XT è uguale al raggio della sfera, essendo il punto T vertice del triangolo CDT ugualmente alto sopra il quadrato del cubo $CDAG$, come il punto R vertice dell' uguale triangolo DRE è alto sopra l'altro

a 5. XIII.
b 4. XIII.
c 7. XIII.
d 4. XIII.
e 15. XIII.

tro

tro quadrato $CDEB$, cui ugualmente s' inclina esso triangolo, essendo ne' triangoletti HQT, ROK il lato HQ ($= NZ$) $= OK$, ed il lato $QT = OR$ intorno ad angoli retti HQT, KOR; e però $HT = KR$, e l' angolo $THQ = RKO$; onde tutte le distanze degli angoli del pentagono $RDTCS$ dal punto X essendo uguali a' raggi della sfera, tutto il dodecaedro compreso da questi dodici pentagoni, che si descriverebbero sopra i dodici lati del cubo, come questo è descritto sopra CD, in modo che il lato del cubo sia la corda sottesa ad un angolo di esso pentagono, resterà inscritto nella medesima sfera; il quadrato del cui diametro essendo triplo del quadrato del lato del cubo [a], come il quadrato del lato d' un triangolo equilatero è triplo del quadrato del lato dell' esagono [b]; ed il quadrato del lato del cubo LK al quadrato del lato del pentagono SR essendo, come il quadrato NK al quadrato NO, o come il quadrato NO al quadrato OK (per essere in estrema, e media ragione divisa NK in O, ed NO il segmento maggiore, OK il minore) o come il quadrato dell' esagono al quadrato del decagono (essendo il lato dell' esagono al lato del decagono, come il maggiore segmento al minore della retta divisa in estrema, e media ragione [c]); dunque per l' ugualità ordinata il quadrato del diametro della sfera al quadraro del lato SR del dodecaedro è, come il quadrato del triangolo equilatero al quadrato del lato del decagono; e così il diametro della sfera al lato del dodecaedro è, come un lato del triangolo equilatero a quello del decagono inscritto nel medesimo cerchio. Il che ec.

a 15. XIII.

b 12. XIII.

c 9. XIII.

PRO-

PROPOSIZIONE XVIII. PROBL.

Esporre tutti i lati delle passate cinque figure solide, e paragonarle tra loro. FIG. 240.

SIa AHB un semicircolo massimo della sfera, ed il diametro BA eretta la perpendicolare AE uguale ad esso diametro, dal centro C si tiri la CE segante la periferia in D, e si tiri la DI perpendicolare al diametro, e presa $BF = \frac{1}{3}$ di AB si alzino le perpendicolari FG, CH, e si congiungano le rette AD, AH, AG, BG, e questa dividasi in K secondo l' estrema, e media ragione.

Essendo $3 . 2 :: AB . AF :: AB$ q. AG q., sarà AG il lato del Tetraedro [a]: ed essendo $2 . 1 :: AB . AC :: AB$ q. AH q., sarà AH il lato dell' ottaedro [b]: ed ancora $3 . 1 :: AB . BF :: AB$ q. BG q.: dunque BG è il lato del Cubo [c]: ed essendo AE dupla di AC, sarà ancora DI dupla di CI; e però il quadrato DI è quadruplo del quadrato CI, onde i due quadrati DI, CI, cioè il quadrato del raggio CD, ovvero CA è quintuplo del quadrato CI; onde essendo CI media proporzionale tra il raggio CA, e la quinta parte di esso, eretta la perpendicolare DI, e congiunta l' AD, sarà questa per la costruzione della Proposizione 16. il lato dell' Icosaedro: ed essendo BK la maggior porzione di BG segata secondo l' estrema, e media ragione, sarà esso BK il lato del dodecaedro [d]. Dunque essi lati AG, AH, BG, AD, BK sono i lati delle cinque figure solide inscritte nell' istessa sfera: e presa $AB = \sqrt{60}$, saranno $AG = \sqrt{40}$; $AH = \sqrt{30}$; $BG = \sqrt{20}$;

a 13. XIII.
b 14. XIII.
c 15. XIII.
d 17. XIII.

$AD = \sqrt{30 - \sqrt{180}}$ (perchè $AC = \sqrt{15}$, e $CI = \sqrt{3}$, essendo il suo quadrato la quinta parte del quadrato AC, quarta parte del quadrato AB; onde $AI = \sqrt{15} - \sqrt{3}$, però il suo quadrato $= 15 + 3 - 2\sqrt{45} = 15 + 3 - \sqrt{180}$: ed aggiunto il quadrato $DI = 12$, è $AD = \sqrt{30 - \sqrt{180}}$) e finalmente $BK + 5 = \sqrt{5}$: imperocchè essendo $BG = \sqrt{20}$, la quale $= 2\sqrt{5}$, e chiamando il maggiore segmento $BK = x$, sarà $2\sqrt{5} . x :: x . 2\sqrt{5} - x$; e però $xx = 4 \times 5 - 2\sqrt{5}x = 20 - 2\sqrt{5}x$, e trasportando quest' ultimo termine, ed aggiungendo dall' una, e dall' altra parte il quadrato di $\sqrt{5}$, sarà $xx + 2\sqrt{5}\,x + 5 = 25$: e prese le radici $x + \sqrt{5} = 5$, dunque x, cioè $BK = 5 - \sqrt{5}$, il di cui quadrato essendo $25 + 5 - 10\sqrt{5} = 30 - \sqrt{500}$; però esso lato $BK = \sqrt{30 - \sqrt{500}}$.

IL FINE.

Mombello

B
I
C
A
E
49.
G
H
D
51.
B
H
G
56.
C
B
D
A
B
C
54.
O
N
M
P
Q
L
K
L
I
F
E
H
I
K
A
G
I
59.
A
C
B
F
A
E
H
D
62.
H
C
C
D
E
B
68.
D
A
E
C
5.
D
C
F
E
B
A

1
C
D

97.
100.
102.
106.
108.

EUCL. T. VI.
111.
D
A
E
B
C
F
114.
A
C
B
3E
E
3A
A
B
4B
E
F
4F
F
4F
119.
A B C D
E
F
H I K
121.
H I O
C B
F
E
N
M P
124.
A
B
F
D
C
D
G
H
125.
D
E
G
B
E
129.
G
H
C
F
A
D

EUCL. T. VII.
132.
A
E
F
G
B
134.
A
E
C
F
A
B
138.
D
H
C
F
B
E
A
140.
D
B
C
143.
A
B
D
145.
B
H
C
G
B
D
A
E
148.
150.
A
C
F
B
D
B
C
D
I
B

EUCL. T. VIII.
155.
15
160.
162.
165.
167.

20

216.

218.

N
E
F
2
A
D
C